Omerović Lejla

LINEARNA ALGEBRA

(vježbe)

(četvrtak, 8:15-11:00
428)

Prof: Manuela Muzika

knj: Perić, prvi dio W

Zbir.: Proskurjakov, zb. zad. iz lin. alg.

Šoprinski: Zbirka zad. iz više algebre W

aps. konv. $\Rightarrow$ ušl. konv
$\overset{?}{\Leftarrow}$

uslovno div $\Rightarrow$ aps. div
$\overset{?}{\Leftarrow}$

$\boxed{1}$

PUM

LA1

16.10.'03.

- Pojmovi grupoida, polugrupe, grupe

Def: Binarna operacija f nepraznog skupa G je svako preslikavanje $f: G \times G \to G$

Bin. op. f češće ćemo označavati sa $*$, $+$...

- Uređeni par (G, f) (koja je def. na skupu G) odnosno $(G, *)$ zovemo grupoid.

Grupoid $(G, *)$ je komutativan ako za $\forall x, y \in G$, $x * y = y * x$

Grupoid $(G, *)$ je asocijativan ako vrijedi $(\forall x, y, z \in G)\ (x * y) * z = x * (y * z)$

Asocijativan grupoid zove se polugrupa.

Def: Grupoid $(G, *)$ zovemo grupa ako važi sljed.

1.) $(\forall x, y, z \in G)\ (x * y) * z = x * (y * z)$ asocijacija

2) $(\exists e \in G)\ (\forall x \in G)\ x * e = e * x = x$ neutralni element

3) $(\forall x \in G)\ (\exists y \in G)\ x * y = y * x = e$ inverzni element

Ako poslije toga važi i zakon komutacije $(\forall x, y \in G)\ x * y = y * x$ onda kažemo da je grupa $(G, *)$ komutativna ili Abelova grupa.

Def: Neka su $(G, *)$ i $(H, \cdot)$ dvije grupe. Funkcija $f: G \to H$ je homomorfizam grupe G u grupu H ako vrijedi: $(\forall x, y \in G)\ f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$

Injektivan homomorfizam se zove monomorfizam

Surjektivan -II- epimorfizam

Bijektivan -II- izomorfizam

Homomorfizam grupe G u samu sebe se zove endomorfizam

Bijektivan endomorf. se zove $\longrightarrow$ automorfizam

Def: Relacija ekvivalencije ρ na skupu G je kongruencija grupoida $(G, *)$ ako je saglasna sa operacijom $*$ u grupoidu G, tj. ako vrijedi $(\forall x, y, a, b \in G)\ x \rho y \wedge a \rho b \Rightarrow x * a \rho y * b$

Zadaci:

1) Neka je $G=(G,\cdot)$ grupoid a ρ relacija ekv. skupa G i $G/\rho=(G/\rho,\cdot)$ struktura koja je def. sa $[x]\cdot[y]=[x\cdot y]$

Dokazati da je $(G/\rho,\cdot)$ grupoid akko je ρ kongruencija grupoida G

$(G,\cdot)$, ρ

G/ρ - skup klasa ekv.

$[x]$

$[x]\odot[y]=[x\cdot y]\in G/\rho$

$$\left.\begin{array}{l} x\rho y \\ a\rho b \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot a\,\rho\, y\cdot b \quad \forall x,y,a,b\in G$$

$\odot : G/\rho \times G/\rho \to G/\rho$

$[x]\odot[y]=[x\cdot y]$

$$\left.\begin{array}{l} [x]=[a] \\ [y]=[b] \end{array}\right\} \Rightarrow [x\cdot y]=[a\cdot b]$$

$$\left.\begin{array}{l} x\rho a \\ y\rho b \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot y\,\rho\, a\cdot b.$$

$[x\cdot y]=[a\cdot b]$

$[x]\odot[y]=[a]\odot[b]$

Relacija u skupu G/ρ je dobro definisana

$(G/\rho,\odot)$ - grupoid

Obratno: pretp. $(G/\rho,\odot)$

$$\begin{array}{ll} x\rho y & [x]=[y] \\ a\rho b & [a]=[b] \end{array}$$

$[x]\odot[a]=[y]\odot[b]$

$[x\cdot a]=[y\cdot b]$

$x\cdot a\,\rho\, y\cdot b$

2) Dokazati da je relacija $\equiv_3$ na skupu N_0 def. sa $x \equiv_3 y$ akko x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju sa 3 kongruencija grupoida $(N_0,+)$. Odrediti klase ekv., def. količničku strukturu N_0 po relaciji ekv. $(N_0/\equiv_3, +)$ i pokazati da je ta struktura grupa

Pokažimo da je relacija $\equiv_3$ relacija ekv. u skupu N_0

i) $x \equiv_3 x$ refleksivna

ii) $x \equiv_3 y \Rightarrow y \equiv_3 x$ sim.

iii) $x \equiv_3 y \wedge y \equiv_3 z \Rightarrow x \equiv_3 z$ tranzitivna

$x \equiv_3 y \Rightarrow 3 \mid (x-y) \qquad x-y=3k$

$a \equiv_3 b \Rightarrow 3 \mid (a-b) \qquad a-b=3m$

$x-y+a-b=3(k+m)$

$(x+a)-(y+b)=3(k+m)$

$3 \mid (x+a)-(y+b)$

$x+a \equiv_3 y+b$ - relacija kongruencije

$\{0,3,6,9\ldots\} = [0]$

$\{1,4,7,10,\ldots\} = [1]$

$\{2,5,8,11,\ldots\} = [2]$

$N_0/\equiv_3 = \{[0],[1],[2]\}$

Definišimo operaciju sabiranja

$[a]+[b]=[a+b]$ Na osnovu prethodnog zadatka zaklj. da je ovako def. op. u skupu $N_0/\equiv_3$ dobro def. Ostaje još da provjerimo da je $(N_0/\equiv_3, +)$ grupa

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

simetrična po gl. dij.

Kelijeva tablica

+ $N_0/\equiv_3$ -asocijativno

[0] -neutralan el. za sabiranje

[0] - [0] svaki el. ima svoj
[1] - [2] inverzni element
[2] - [1]

-simetrična

Pa je $(N_0/\equiv_3, +)$ Abelova grupa

$N_0/\equiv_3 = N_3$

3) Ako je $\equiv_n$ relacija na skupu $\mathbb{Z}$ def. sa $x \equiv_n y$ akko x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju sa n, $\mathbb{Z}_n = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\}$ i operacija $+_n$ u skupu $\mathbb{Z}_n$ definisana sa $[x] +_n [y] = [x+y]$ ~~vrijedi~~ $\forall [x],[y] \in \mathbb{Z}_n$. Dokazati da je $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ Abelova grupa

$\equiv_n$ -relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$

Pokažimo da je $\equiv_n$ kongr. na skupu $\mathbb{Z}$ -sa ...

$x \equiv_n y$ $\quad n \mid x-y$ $\quad x-y = n \cdot l$

$a \equiv_n b$ $\quad n \mid a-b$ $\quad a-b = n \cdot k$

$x-y+a-b = n(k+l)$

$(x+a)-(y+b) = n(k+l)$

$n \mid (x+a)-(y+b)$

$x+a \equiv_n y+b$

Ova rel. je kongr. na $\mathbb{Z}$

Pokažimo da je operacija $+_n$ dobro defin.

$[x] = [a]$

$[y] = [b]$

$x \equiv_n a$

$y \equiv_n b$

$x+y \equiv_n a+b$

$[x+y] = [a+b] \Rightarrow [x] +_n [y] = [a] +_n [b]$

pa je ~~tako~~ op. dobro def. i $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ grupoid

Zakon asocijacije: $[a],[b],[c] \in \mathbb{Z}_n$

$([a] +_n [b]) +_n [c] = [a+b] +_n [c] = [a+b+c] = [a] +_n [b+c] = [a] +_n ([b] +_n [c])$

1b) ~~Ukazati da~~ znači $(Z_n, +_n)$ je podgrupa

Pokažimo da je $[0]$ neutralni el. podgrupe

$[a] \in Z_n$

$$\left.\begin{array}{l}[a]+_n[0]=[a+0]=[a]\\ [0]+_n[a]=[0+a]=[a]\end{array}\right\}\ [0]\text{ neutr. el.}$$

$[a] \in Z_n$

$$\left.\begin{array}{l}[a]+_n[-a]=[a-a]=[0]\\ [-a]+_n[a]=[-a+a]=[0]\end{array}\right\}\ \text{inverzni el.}$$

komutativnost:

$[a], [b] \in Z_n$

$[a]+_n[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+_n[a]$

Struktura $(Z_n, +_n)$ je <u>Abelova grupa</u>

4) Dokazati da je inverzni el. svakog el. grupe jedinstven.

5) Dokazati da je inverzna funkc. izomorfizma grupoida također izomorfizam

4) (Kenan)

Neka je $x \in G$ - inverzni el.

a, b $+$

$x+(a+b)=(x+a)+b=b$

$x+(a+b)=(x+a)+b=(a+x)+b=a+(x+b)=a$

$a=b$ Dakle inv. el. je jedinstven

5) (EMIL)

$x \in G$ e $*$

$x*y=e$

$x*z=e$

$y=y*e=y*(x*z)=(y*x)*z=(x*y)*z=e*z=z$

$y=z$, neutralni el. jedinstven

5)

$G \quad H \quad (G, *) \quad (H, \cdot)$

$h : G \to H$

$h(g_1 * g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad h$ - bijekcija

$\exists\, h^{-1} : H \to G$

$h^{-1}(x_1 \cdot x_2) = h^{-1}(x_1) * h^{-1}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in H$

$(x_1, x_2 \in H) \quad (\exists g_1, g_2 \in G) \quad h(g_1) = x_1 \quad ; \quad h(g_2) = x_2$

$g_1 = h^{-1}(x_1) \qquad g_2 = h^{-1}(x_2)$

$x_1 \cdot x_2 = h(g_1) \cdot h(g_2) = h(g_1 * g_2)$

$h^{-1}(x_1 \cdot x_2) = g_1 * g_2 = h^{-1}(x_1) * h^{-1}(x_2)$

h^{-1} je izomorfizam

6.) Ispitati da li je struktura $(R, *)$ ako je R - skup realnih br. a $*$ def. sa $x * y = xy + 2(x + y + 1)$, grupa

asocijativnost: $x * y = xy + 2(x + y + 1)$

$(x * y) * z = x * (y * z)$

neutr. el.: $e \in R$

$x * e = x$

$x * e = xe + 2(x + e + 1)$

$xe + 2(x + e + 1) = x$

$xe + 2e = -(2 + x)$

$e(x + 2) = -(2 + x) \qquad x \neq -2$

$e = \frac{-(2 + x)}{2 + x} = -1$

za $x = -2$

$-2 * -1 = 2 + 2(-2 + 1 + 1) = -2$

Polugrupa $(R, *)$ nema neutr. el.

inv. el.

$(-2) \cdot x = -1$

$(-2) * x = -2x + 2(-2 + x + 1) = -2x - 4 + 2x + 2 = -2$

$\left.\begin{array}{l} (-2) * x = -2 \\ (-2) * x = -1 \end{array}\right\}$ nemoguće

DZ 7.) Ispitati da li je struktura $(G, \circ)$ grupa ako je $G = \{f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{x},\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\}$ a operacija $\circ$ kompozicija funkc.
Napisati Kelijevu tablicu date strukture

DZ 8) Ako je $(G,\cdot)$ polugrupa u kojoj su za date $a,b \in G$ uvijek rješive jednačine $ax=b \wedge ya=b$ onda je $(G,\cdot)$ grupa. Dokazati

9) Dokazati da je relacija $\equiv_5$ na skupu cijelih br. kongruencija polugrupe $(\mathbb{Z},\cdot)$. Odrediti klase ekv., definisati količničku strukturu $(\mathbb{Z}_5/[0],\cdot)$ i pokazati da je ovo grupa

---

$a \equiv b \pmod 5$ $\quad 5 / a-b$

$x \equiv y \pmod 5$ $\quad 5 / x-y$

$$\begin{aligned} a-b &= 5n \quad \Big\}\cdot x \\ x-y &= 5k \quad \Big\}\cdot b \end{aligned}$$

$$ax - bx - ay + by = 25nk$$

$$ax - bx = 5nx$$
$$xb - yb = 5bk$$

$$ax - yb = 5(nx+bx)$$

$5 / ax - yb$

Klase:
$[0] = \{0, 5, 10, \dots\}$
$[1] = \{1, 6, 11, \dots\}$
$[2] = \{2, 7, 12 \dots\}$
$[3] = \{3, 8, 13, \dots\}$
$[4] = \{4, 9, 14, \dots\}$

$\mathbb{Z}_5 / \{[0]\} = \{[1], [2], [3], [4]\}$

$[x]\cdot[y] = [x \cdot y]$

Kelijeva tablica:

	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

simetrična znači da je polugr. komut.
postoji neutralni el. [1]

pa je polugrupa komutativni monoid.

$$\left.\begin{aligned} &[1]\cdot[1] = [1] \\ &[2]\cdot[3] = [3]\cdot[2] = [1] \\ &[4]\cdot[4] = [1] \end{aligned}\right\}$$ pa je ova str. Abelova grupa

13.10.2003

- Prsten i ideali prstena

Def: Prsten je alg. struktura $(R,+,\cdot)$ sa dvije bin. operacije za koje važi:

i) $(R,+)$ - abelova grupa

ii) $(R,\cdot)$ - polugrupa

iii) važi slj. distributivni zakoni: $\forall (x,y,z)\in R \quad x(y+z)=xy+xz$ - s desna
$\forall (x,y,z)\in R \quad (x+y)z = xz+yz$ - s lijeva

Reći ćemo da je $(R,+,\cdot)$ prsten sa jedinicom ako postoji element $e\in R$ neutralan u odnosu na op. množenja. Kažemo da je prsten $(R,+,\cdot)$ komutativan ako op. množenja zadovoljava zakon komutacije u skupu R.

Najjednostavniji primjer je $(Z,+,\cdot)$

Def: Podskup $P\subseteq R$ je podprsten prstena $(R,+,\cdot)$ ako je P i sam prsten u odnosu na restrikcije operacija iz R. Skup $Z\subseteq Q$ pa je prsten $(Z,+,\cdot)$ podprsten prstena $(Q,+,\cdot)$

Def: Neka su $(R,+,\cdot)$ i $(P,+,\cdot)$ dva prstena. Preslikavanje $h: R\to P$ je homomorfizam prstena R u prsten P ako važi slj.:

i) $\forall (x,y)\in R \quad h(x+y)=h(x)+h(y)$

ii) $\forall (x,y)\in R \quad h(x\cdot y)=h(x)\cdot h(y)$

Def: Element $a\in R$ zove se djelitelj nule prstena R ako postoji $b\in R$ $(b\neq 0)$ tako da je $a\cdot b=b\cdot a=0$ a ako je osim toga, i $a\neq 0$ onda kažemo da je a netrivijalan djelitelj nule prstena R.

Def: Prsten $(P,+,\cdot)$ u kome je $(P\setminus\{0\},\cdot)$ abelova grupa, zove se polje.

1) Ako je $\equiv_n$ relacija na skupu Z def. sa $x\equiv_n y$ akko x i y imaju isti ostatak pri dijeljenju sa n, skup $Z_n=\{[x], x\in Z\}$, operacije $+_n$ i $\cdot_n$ def. sa

$[x]+_n[y]=[x+y]$

$[x]\cdot_n[y]=[x\cdot y] \qquad \forall([x],[y])\in Z_n$

Dokazati da je $(Z_n,+_n,\cdot_n)$ ~~komutativan~~ prsten sa jedinicom! Za koje $n\in N$ je ova struktura polje?

$\cancel{X}$:

- $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ - abelova grupa (dokazano ranije)

i) Operacija $\cdot_n$ je dobro def. jer $[x]=[a]$, $[y]=[b]$ $\Rightarrow$ $x \equiv_n a$, $y \equiv_n b$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-a = n\cdot k \ /\cdot y \\ y-b = n\cdot m \ /\cdot a \\ \hline xy \equiv_n ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} xy-ay = nyk \\ ay-ab = nma \\ \hline xy-ab = n(yk+ma) \\ xy \equiv_n ab \end{array}$$

$n \mid xy-ab$

$[x]\cdot_n[y]=[a]\cdot_n[b]$ pa je op. množenja u skupu $\mathbb{N}$ dobro def.

- asocijativnost: $([x]\cdot_n[y])\cdot_n[z] = [x\cdot y]\cdot_n[z] = [(x\cdot y)\cdot z] = [x\cdot(y\cdot z)] =$
$= [x]\cdot_n[y\cdot z] = x\cdot_n([y]\cdot_n[z])$ $\quad \forall([x],[y],[z]) \in \mathbb{Z}_n$

- distributivnost: $[x]\cdot_n([y]+_n[z]) = [x]\cdot_n[y+z] = [x\cdot(y+z)] =$
$= [xy+xz] = [xy]+_n[xz] = [x]\cdot_n[y]+_n[x]\cdot_n[z]$ $\quad \forall([x],[y],[z]) \in \mathbb{Z}_n$

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ je prsten

$[1] \in \mathbb{Z}_n$ i osim toga $(\forall [x] \in \mathbb{Z}_n)$ $\quad [x]\cdot_n[1] = [x\cdot 1] = [x]$
je neutral. el. množenja $\quad [1]\cdot_n[x] = [1\cdot x] = [x]$

$(\forall [x],[y]) \in \mathbb{Z}_n \quad [x]\cdot_n[y] = [x\cdot y] = [y\cdot x] = [y]\cdot_n[x]$ - komutativnost

pa je $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ komutativan prsten sa jedinicom.

Pokažimo da klasa $[x] \in \mathbb{Z}_n$ ima svoj multiplikativni inverz
akko su x i n uzajamno prosti brojevi.

Pretpostavimo da je $d(x,n)=1 \quad x \neq 0$

$(\exists y, m \in \mathbb{Z})$
$$xy - mn = 1$$
$$xy - 1 = mn$$
$$xy \equiv_n 1$$

$[x]\cdot_n[y] = [xy] = [1]$

$[x]^{-1} = [y]$

Obrnuto pretp. da je $[x]$ invertibilni el. prstena $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$

$(\exists [y])$
$$[x]\cdot[y] = [1]$$
$$xy \equiv_n 1$$
$$xy - 1 = nk$$
$$xy - nk = 1 \Rightarrow (x,n) = 1$$

Zaključak: Ako je n prost broj onda je svaki el. različit od 0 prstena

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ invertibilan pa je naša struktura polje.

2) Ispitati da li je struktura $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ gdje su op. sabiranja i množenja def. sa

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$$
$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2,\ b_1b_2)$$

$\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2$

prsten?

Rj:

$\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ $\qquad \bar{1}=\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$

$\mathbb{Z}_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ $\qquad \bar{1}=\{-2,-5,1,4,7,\dots\}$

$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2=\{(\bar0,\bar0),(\bar1,\bar0),(\bar0,\bar1),(\bar1,\bar1),(\bar2,\bar0),(\bar2,\bar1)\}$

$+$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$
$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$
$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$
$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$
$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar2,\bar1)$	$(\bar2,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$

Operacija je dobro def. simetrija u odnosu na gl. dijagonalu što znači da je komutativna

$(\bar0,\bar0)$ - neutralni element za sabiranje

suprotni elementi:
$$(\bar0,\bar1)+(\bar0,\bar1)=(\bar0,\bar0)$$
$$(\bar1,\bar0)+(\bar2,\bar0)=(\bar0,\bar0)$$
$$(\bar1,\bar1)+(\bar2,\bar1)=(\bar0,\bar0).$$

- asocijativnost:

$$[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)+(a_3,b_3)=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3)=$$
$$=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,\ b_2+b_3)=(a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))$$

Dakle $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2,+)$ - abelova grupa

$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2,\cdot)$

$\cdot$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$
$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$
$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$
$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar0)$
$(\bar1,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$
$(\bar2,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$
$(\bar2,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar2,\bar0)$	$(\bar2,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$

simetrična - komutativno

$(\bar1,\bar1)$ neutralni el.

asocijativnost: kao za sabiranje.

- distributivnost - slično kao asocijativnost

$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ - komutativni prsten sa jedinicom

3) Dokazati da je direktni proizvod dva prstena, prsten.

DZ

4) Dokazati da je $P = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ integralni domen u odnosu na uobičajene op. sabiranja i množenja

→ Komutativan prsten sa jedinicom koji nema netrivijalnih djelitelja nule zove se integralni domen. ←

5) Ako u prstenu sa jedinicom $(R,+,\cdot)$ važi da je $(a+b)^2=a^2+b^2$ $(\forall a,b\in R)$ tada je taj prsten komutativan, dokazati!!

---

4)
$$(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2}) = a_1+b_1\sqrt{2}+a_2+b_2\sqrt{2} = \underbrace{(a_1+a_2)}_{\in \mathbb{Z}}+\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{2} = a_3+b_3\sqrt{2} \in P$$

$$((a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2}))+(a_3+b_3\sqrt{2}) = (a_1+a_2+(b_1+b_2)\sqrt{2})+(a_3+b_3\sqrt{2}) =$$

$$=[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]\sqrt{2} = \dots = (a_1+b_1\sqrt{2})+((a_2+b_2\sqrt{2})+(a_3+b_3\sqrt{2}))$$
$$\forall (a_i+b_i\sqrt{2})\in P \quad i=1,2,3$$

asocijativnost : $0+0\cdot\sqrt{2}\in P$ $\quad \forall(a+b\sqrt{2})$ $\quad (a+b\sqrt{2})+(0+0\cdot\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2}$

$(0+0\cdot\sqrt{2})$ - neutralni element

$a+b\sqrt{2}\in P$

$-a-b\sqrt{2}$ - suprotni el. $\qquad a+b\sqrt{2}+(-a-b\sqrt{2}) = 0+0\cdot\sqrt{2}$

$(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2}) = (a_2+b_2\sqrt{2})+(a_1+b_1\sqrt{2})$ - komutativnost

$(P,+)$ - abelova grupa

Operacija množenja

$\left.\begin{array}{l}\text{zatvorena u } P\\ \text{asocijativna u } P\\ \text{distributivna u } P\end{array}\right\}$ provjeriti

$$(a_1+b_1\sqrt{2})[(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_3+b_3\sqrt{3})] = (a_1+b_1\sqrt{2})[a_2+a_3+(b_2+b_3)\sqrt{2}] =$$

$$= a_1\cdot(a_2+a_3)+a_1\sqrt{2}(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3)\sqrt{2}+b_1(b_2+b_3)\cdot 2 = \dots =$$

$$= (a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_1+b_1\sqrt{2})(a_3+b_3\sqrt{2})$$

Jedinični el. $\quad (1+0\cdot\sqrt{2})$

$(P,+,\cdot)$ - komutativan prsten sa jedinicom

Ovaj prsten nema netrivijalnih djelitelja nule

Dokaz: Neka je $a+b\sqrt{2}\neq 0$ i neka je $(c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2}) = 0$

$$\underbrace{ca+2bd}_{\in \mathbb{Z}}+\underbrace{(cb+da)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{2} = 0$$

$a\neq 0$
$b\neq 0$

$ca+2bd=0 \qquad ca=-2bd \qquad c=-\dfrac{2bd}{a}$

$cb+da=0$

$$-\frac{2bd}{a}\cdot b+da=0$$

$d\left(-\frac{2b^2}{a}+a\right)=0$

$d=0 \vee -\frac{2b^2}{a}+a=0$

onda je i $c=0$ $\quad -2b^2=-a^2$

$2b^2=a^2$ / vrijedi ako je $a=b=0$ kontradikcija

$c+d\sqrt{2}=0+0\cdot\sqrt{2}$

a to znači da ovaj prsten nema netrivijalnih djelitelja nule pa je integralni domen.

5) $(a+b)^2=a^2+b^2$

$a=b=1$

$(1+1)^2=1^2+1^2$

$(1+1)(1+1)=1+1+1+1=1+1$

$1+1=0$

$1=-1$

$x\cdot 1=x\cdot(-1)$

$x=-x$

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+b^2$

$ab+ba=0$

$ab=-ba$

$-ba=ba$ $\quad (\forall a,b\in R)$ - R komutativan prsten

$ab=ba$

6) Neka je $f: R\to P$ homomorfizam prstena R i P. Dokazati da je $f(R)$ pod~~prsten~~ prstena P

7) Dokazati da je svaki konačan integralni domen polje.

8) Dokazati da je prsten $(R,+,\cdot)$ u kome za $\forall x\in R$ važi: $x\cdot x=x$ komutativan prsten

6) $f: R\to P$

$(f(R),+,\cdot)$ - prsten, dokazati!!

$x,y\in f(R)$

$(\exists a,b\in R)$ $f(a)=x$ i $f(b)=y$

$x+y=f(a)+f(b)=f(a+b)$ $\quad a+b\in R$

$f(a+b) \in f(R)$

- $x \cdot y = f(a) \cdot f(b) = \underbrace{f(a \cdot b)}_{\in f(R)}$ $\quad a \cdot b \in R$

asocijativnost: $\underbrace{(x+y)+z}_{\in f(R)} = \underbrace{x+(y+z)}_{\in f(R)}$ jer $x, y \in f(R) \subseteq P$ u P onda važi i u $f(R)$

slično i za asocijativnost množenja

Prsten R ima neutralan el. za sabiranje, to je 0. $f(0)+0 = f(0)+f(0) = f(0)$

$f(0)+f(0) = f(0)$

$\underbrace{f(0)=0}_{\in f(R)}$ u prstenu P

$\forall x \in f(R)$ $\quad x = f(a)$ i

$x + 0 = f(a) + f(0) = f(a+0) = f(a) = x$ jer je $f(0)$ neutr. el. u prstenu $f(R)$

$x \in f(R)$ i $x = f(a)$
$a \in R$ i $(\exists -a \in R)$ $\quad a+(-a) = 0$

$f(0) = f(a+(-a)) = f(a) + f(-a)$

Inverzni el. elementa a je $f(-a) \in f(R)$

Komutativnost u $f(R)$ je naslijeđena iz prstena P za sabiranje zaključujemo da je $(f(R),+)$ abelova grupa

asocijativnost množenja slijedi iz asocijativnosti u skupu $f(R)$ kada se napravi restrikcija množenja u skupu $f(R) \subseteq P$

distributivnost – slično

Pa je $(f(R),+,\cdot)$ prsten. Pošto je $f(R) \subseteq P$ to je ova struktura podskup prstena $(P,+,\cdot)$

8) $x \in R$

$(x+x) \cdot (x+x) = x+x$

$xx + xx + xx + xx = x+x+x+x = x+x$

$x + x = 0$

$x = -x \quad \forall x \in R$

$a, b \in R$

$(a+b)(a+b) = (a+b)$
$aa + ab + ba + bb = a+b$

$a+ab+ba+b=a+b$

$ab=-ba$

$ab+ba=0$

$-(ba)=ba$

$ab=ba$ $\forall a,b\in R$ pa je prsten komutativan

7)
R $a\in R$ $a\neq 0$

$\{a, a^2, a^3, \dots\}$

30.10.'03.

Vektorski prostor i modul

Def: Neka je K dato polje i V neprazan skup sa unutrašnjom operacijom $+$ tako da je $(V,+)$ abelova grupa, spoljašnja operacija $\cdot$ za koju vrijedi:

i) $k(v_1+v_2)=kv_1+kv_2$ $\forall k\in K$, $v_1,v_2\in V$

ii) $(k_1+k_2)v=k_1v+k_2v$ $\forall k_1,k_2\in K$, $v\in V$

iii) $k_1(k_2v)=(k_1k_2)v$ $\forall k_1,k_2\in K$, $v\in V$

iv) $1\cdot v=v$ $\forall v\in V$, $1\in K$

Strukturu $(V,+,\cdot)$ zovemo vektorskim prostorom nad poljem K. Ako umjesto polja K uzmemo komutativan prsten sa jedinicom R onda se $(V,+,\cdot)$ zove modul nad prstenom R.

Def: Neka je V modul nad prstenom R, a S neprazan podskup od V. Reći ćemo da je skup S zatvoren ili stabilan u odnosu na operacije iz V ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

i) $x,y\in S \Rightarrow x+y\in S$

ii) $x\in S, \alpha\in R \Rightarrow \alpha x\in S$

iii) $x,y\in S$, $\alpha,\beta\in R \Rightarrow \alpha x+\beta y\in S$

Ukoliko je pri tome S modul nad R u odnosu na ove operacije, onda se kaže da je S podmodul modula V.

1) Dokazati da je skup svih n-torki sastavljenih od elemenata polja K u kojem je sabiranje i množenje elemenata iz K def. sa $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$

$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ $\lambda \in K$ vektorski prostor.

Rj: Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$; tada je $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ također zatvoreno u odnosu na $+$

Zakon asocijacije je naslijeđen iz K. Ako je $0 \in K$ (neutr. el. sabiranja) u K onda je n-torka $(0, 0, \dots, 0) \in K^n$ neutr. el. za sabiranje polja K^n jer $(0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ za svaku n-torku iz K^n, jer polje a svaki od elemenata ima svoj aditivni inverz u K tj. $-a_i$, $i = \overline{1,n}$

~~Sad je $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ proizvoljna n-torka, tada su $a_i \in K$~~

Sad je $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) = (0, 0, \dots, 0)$. Svaka n-torka iz K^n ima svoju suprotnu n-torku koja također (eZ) je skup K^n.

Dalje K je polje tj. $+$ je komutativan u K pa za svake dvije n-torke $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$ tj. $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =$

$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2, \dots, b_n+a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Dakle, $(K^n, +)$ je abelova grupa

→ Ostaje da se provjere još 4 osobine

$\lambda \in K$; $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$ tada je:

$\lambda[(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)] = \lambda[(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)] =$

$= [\lambda(a_1+b_1), \lambda(a_2+b_2), \dots, \lambda(a_n+b_n)] = [(\lambda a_1 + \lambda b_1), (\lambda a_2 + \lambda b_2), \dots, (\lambda a_n + \lambda b_n)] =$

$= \lambda(a_1, \dots, a_n) + \lambda(b_1, b_2, \dots, b_n)$

pa važi osobina distributivnosti množenja skalara u odnosu na sabiranje vektora

ii)
$\lambda, \mu \in K$ $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ tada je:

$(\lambda+\mu)(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((\lambda+\mu)a_1, (\lambda+\mu)a_2, \dots, (\lambda+\mu)a_n) =$

$= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \dots, \lambda a_n + \mu a_n) = \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) + \mu(a_1, a_2, \dots, a_n)$

distributivnost skalara u odnosu na množenje vektora.

iii) za $\lambda, \mu \in K$ i $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ imamo da je:

$\lambda(\mu(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \dots, \mu a_n) = (\lambda(\mu a_1), \lambda(\mu a_2), \dots, \lambda(\mu a_n)) =$

$=$ (asocijativnost množenja u prstenu) $= ((\lambda\mu)a_1, (\lambda\mu)a_2, \dots, (\lambda\mu)a_n) = (\lambda\mu)(a_1, a_2, \dots, a_n)$

iv) Ako je 1 neutr. el. za množenje u polju K onda je za svaku n-torku $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$

$1 \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ pa je $(K^n, +, \cdot)$ vektorski prostor nad K.

Pošto je skup realnih brojeva polje, to znači da je $(R^n, +, \cdot)$ polje nad R.

Isto tako vrijedi i za $(R^n, +, \cdot)$

2) Dokazati da je skup cijelih brojeva modul nad samim sobom u odnosu na operacije + i $\cdot$ cijelih brojeva! Da li je skup cijelih brojeva vektorski prostor nad poljem R?

Skup $(V, +, \cdot)$

→ Ako je neka struktura $(R, +, \cdot)$ prsten onda je $(R, +)$ abelova grupa a $(R, \cdot)$ je polugrupa.

Ako je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor onda je $(V, \cdot)$ abelova grupa

- povezuje s poljem K i koji zadovoljava i, ii, iii, iv.

→ Svaki vektorski prostor je modul pa je $(R, +)$ prsten (ne važi obratno)

$(Z, +)$ je abelova grupa (dokazano!)

Ako def. $\cdot$ ona će se poistovijetiti sa $\cdot$ u skupu Z tako da je $Z \times Z \to Z$ na uobičajen način imamo da vrijedi $\forall a, b \in Z$, $\forall x \in Z$:

$(a+b)x = ax + bx$

$\forall a \in Z \wedge x, y \in Z$ $a(x+y) = ax + ay$.

$\forall a, b \in Z$, $x \in Z$

$a(bx) = (ab)x$

$1 \in Z$ $\forall x \in Z$ $1 \cdot x = x$ pa pošto je pos uz to skup $(Z, +, \cdot)$ komutativan i sa 1 ova struktura jeste modul.

$(Z, +, \cdot) \to$ modul nad Z.

$\cdot : R \times V \to V$

Imamo $R \times Z \to Z$

$\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3} \notin Z$ pa nije tačno da je vektor usmjerena duž.

3) Pokazati da je skup $\mathbb{Z}_n$ modul nad prstenom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ u odnosu na uobičajenu operaciju sabiranja $+_n$ i množenja elemenata iz $\mathbb{Z}$ def. ~~sa~~ $a[x]=[ax]$ $a\in\mathbb{Z}$, $[x]\in\mathbb{Z}_n$

Rj: Imamo dva skupa: skup klasa $\mathbb{Z}_n$ i skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$.

$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$

I ranije smo pokazali da je $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ abelova grupa.

$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ (spoljašnja kompozicija)

Trebamo vidjeti da li ova operacija ima i, ii, iii, iv i treba provjeriti da li je operacija dobro definisana

$a[x]=[ax]\in\mathbb{Z}_n$ imamo

i) $a,b\in\mathbb{Z}$, $[x]\in\mathbb{Z}_n$

$(a+b)[x]=[(a+b)x]=[ax+bx]=[ax]+_n[bx]=a[x]+_n b[y]$ i ako je $a\in\mathbb{Z}$, $[x],[y]\in\mathbb{Z}_n$ onda je

$a([x]+_n[y])=a[x+y]=[a(x+y)]=[ax+ay]=a[x]+_n a[y]$ uzmimo

iii) $a,b\in\mathbb{Z}$, $[x]\in\mathbb{Z}_n$ pa je

$a(b[x])=a[bx]=[a(bx)]=[(ab)x]=(ab)[x]$

iv) $\forall[x]\in\mathbb{Z}_n$ $1\cdot[x]=[1\cdot x]=[x]$

To znači da je $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ modul nad prstenom cijelih brojeva

4) Objasniti koji od slj. skupova kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{R}$ ili kompleksnih brojeva čini vektorski prostor u odnosu na operacije sabiranja matrica i množenja matrica elementom iz $\mathbb{Z}$ ili iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$

a) sve matrice

b) simetrične matrice

c) koso simetrične matrice

d) singularne matrice

e) regularne matrice

f) matrica čiji je trag jednak 0

a) raditi proste sednice

→ Ako posmatramo matrice iz $C^{n\times n}$ posmatramo skup $(C^n, +, \cdot)$ dobit ćemo matricu čiji su elementi...

b) $a_{ij} = a_{ji}$

$i, j = \overline{1,n}$ matrice čiji elementi zadovoljavaju ...

$(R^{n\times n}, +, \cdot)$ - vektorski prostor nad poljem R

Neka je skup S skup svih matrica. Definitivno je $S \subseteq R^{n\times n}$

Uzmimo dvije matrice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Pošto su simetrične vrijedi:

$a_{ij} = a_{ji}$ i $b_{ij} = b_{ji}$

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = c_{ij}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$

tj. matrica $A+B$ je iz S, pa je S zatvoren u odnosu na sabiranje matrica iz S.

Uzmimo proizvoljno $\lambda \in R$ i matrica $A \in S$, $A = (a_{ij})$

$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = (d_{ij})$

$d_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda a_{ji} = d_{ji}$ $i, j = \overline{1,n}$

pa je S potprostor prostora $R^{n\times n}$

c) kososimetrična matrica

$a_{ij} = -a_{ij}$ $i,j = \overline{1,n}$ je također vektorski prostor potprostora $R^{n\times n}$

d) Singularne matrice:

$A, B \in G_n \Rightarrow$ treba da je $A + B \in G_n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$ $\det B = 0$

$\det A + \det B = 1$

tj. $A + B \in$ skupu

e) regularne matrice

$E_T \in$ regularna $E_T - E = 0 \notin$ regul. matr. pa ne može biti potprostor prostora?

$-E \notin$ regularna

g) Neka je skup T skup svih matrica traga 0.

$A = (a_{ij})$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$

$A, B \in T$

$A=(a_{ij})$

$B=(b_{ij})$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0 \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ii}=0$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=c_{ij}$

$\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=a_{ii}+b_{ii}=0$ što znači $A+B\in T$

II slučaj: $\lambda\in R$

$\lambda A=(\lambda a_{ij})$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ij}=\lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0 \qquad \lambda A\in T$

pa je T vektorski prostor nad poljem R

5) Neka su U i W vekt. potprostori prostora V. Dokazati da je $U\cup W$ vektorski potprostor od V akko je $U\subseteq W$ ili $W\subseteq U$

Rj: Ako je $U\subseteq W$ onda je $U\cup W=W$ a to je potprostor od V pa je zadatak dokazan u jednom smjeru.

Trebamo pokazati obrnuto:

Pretp. da $U\not\subseteq W$ niti $W\subseteq U$; Trebamo pokazati da $U\cup W$ nije vekt. prost.

Pošto $U\not\subseteq W$ to znači da $\exists a\in U\setminus W$.

Isto tako pošto $W\not\subseteq U$ $\exists b\in W\setminus U$ elementi a i b pripadaju $U\cup W$ pa je za očekivati da $a+b\in U\cup W$.

Pretp. da je $a+b\in U$ tj. $a+b=u\in U$.

No tada je $b=u-a$. Pošto u i a iz U i U vekt. prost. i $u-a\in U$ tj. $b\in U$ to je kontradikcija.

Ako pretp. da je $a+b\in W$ onda $a+b=w\in W$, pa je $a=b-w$, pa je i $a\in W$ kontradikcija sa $a+b\notin U\cup W$, što znači da $U\cup W$ nije vekt. potprostor prostora V.

Dalje $U\cap W$ - dokazuje se na pretp. da je $U+W=\{u+w: u\in U \wedge w\in W\}$

6) Dokazati da je skup V rješenja homogenog sistema lin. jed.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0$
$\vdots$
$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}=0$ sa realnim koef., vektorski prostor!

Ako ovaj sist. ima trivijalno rj.

Ako ima više rj. onda su to vektori n-torke (sistem n-reda). Skup svih

rješenja se sadržava u skupu R^n, $V \subseteq R^n$.

Pokušavam izbjeći ovih 8-9 slučajeva.

no kraće je zaključiti da je $V \subseteq R$ i da uzmemo ta 2 elementa iz

$V \ni v_1, v_2$ i pokažemo $v_1+v_2 \in V$, $z \in R$ i pokažemo $zv_1 \in V$ te

$v_1, v_2 \in V$, $\alpha, \beta \in R$ $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ (ovo ćemo pokazati na vježb.)

$\rightarrow$ Uzmemo $v_1, v_2 \in V$

$v_1 = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1)$ a vektor

$v_2 = (v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2)$ oba ova vektora su rj. sist. jed.

$\sum_{1}^{n} a_{ij} v_j^1 = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^2 = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

ad: $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha v_1^1 + \beta v_1^2, \alpha v_2^1 + \beta v_2^2, \dots, \alpha v_n^1 + \beta v_n^2)$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha v_j^1 + \beta v_j^2) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha v_j^1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta v_j^2 = \alpha \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^1}_{0} + \beta \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^2}_{0} = \underbrace{\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0}_{0}$$

a $\forall i = \overline{1,n}$

a to je da je $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ tj. V je vekt. prost. nad R i podprostor prost. R^n.

3) Neka je V modul nad prstenom R, a X neprazan podskup od V.

Dokazati da skup X ima osobinu $(*)$ $x, y, z \in X$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$ $\mp$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z \in X$ akko postoji podmodul S modula V i $a \in V$

tako da je $(**)$ $a \in R$, $X = a + S = \{a + s : s \in S\}$. U tom slučaju podmodul S

je jednoznačno određen skupom X, a element a se može proizvoljno uzeti

iz X. Ukoliko prsten R posjeduje element $g \in R$ a $1-g$ invertibilan

element tako da je $(*) \Leftrightarrow (**)$ uslovam.

Ako je $\alpha \in R \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)x \in X$

Rj: Pretp. najprije $X = a + S = \{a + s : s \in S\}$

$x, y, z \in X$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tako da je $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\Rightarrow \gamma = 1 - \alpha - \beta$.

$\exists s_1, s_2, s_3 \in S \mid x = a + s_1$, $y = a + s_2$, $z = a + s_3$.

$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha(a + s_1) + \beta(a + s_2) + \gamma(a + s_3) = \alpha(a + s_1) + \beta(a + s_2) + (1 - \alpha - \beta)(a + s_3)$

$= \alpha a + \alpha s_1 + \beta a + \beta s_2 + a + s_3 - \alpha a - \alpha s_3 - \beta a - \beta s_3 =$

$= a + (\alpha s_1 + \beta s_2 - \alpha s_3 - \beta s_3 + s_3) = a + s_n$ gdje je $s_n = \alpha s_1 + \beta s_2 + s_3 - \alpha s_3 - \beta s_3 \in S$

pa je zatvoren za $+$ i $\cdot$

S je podmodul, pa $\vec{0}$ pripada S, $a + a \in X$, $a \in X$, za a možemo uzeti proizvoljno a, S je jednoznačno određen sa X a $S = -a + X = \{-a + x : x \in X\}$.

Pretp. da važi relacija $(*)$. Treba da pokažemo da tad postoji modul S takav da je ... –

$\rightarrow$ Uzmimo $a \in X$ proizvoljno i def. ga na ovaj način $S = -a + X = \{\dots\}$.

Ostaje da se pokaže da je S podmodul modula V.

$\rightarrow$ Uzmimo $m, n \in S$ i $\alpha, \beta \in R$ (treba pokazati da je $\alpha m + \beta n \in S$

$\exists\, x, y \in X$, $m = -a + x$, $n = -a + y$ — uzmimo da je μ / $\mu = 1 - \alpha - \beta$ pa je $\mu + \beta + \alpha = 1$ i uzmimo $a \in X$ ($a z + \dots z(1)$

$\alpha(-a + x) + \beta(-a + y) = -\alpha a + \alpha x - \beta a + \beta y$

$\alpha(-a + x) + \beta(a + y) = -\alpha a + \alpha x - \beta a + \beta y + a - a = -a + \alpha x + \beta y + (1 - \alpha - \beta) a = -a + z$

gdje je $z \in X$.

Pa je $\alpha m + \beta n \in S$ što znači da je S podmodul modula V.
(II dio zadatka sam!)

06. 11. '03.

1) Dokazati da je skup svih n-torki sastavljen od elemenata polja K u kome je sabiranje i množenje elem. iz K def. sa
$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ $\lambda \in K$ vektorski prostor.

Dokaz: Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$ proizvoljan. Tada je
$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in K^n$ jer su
$a_i + b_i$, $i = \overline{1, n}$ iz K. Zakon asocijacije je naslijeđen iz polja K, ako je $0 \in K$ neutralni el. za sabiranje u polju K, onda je n-torka $(0, 0, \dots, 0) \in K^n$ neutr. el. za sabiranje polja K^n, jer je
$(0, 0, \dots, 0) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0 + a_1, 0 + a_2, \dots, 0 + a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$

Svaki od a_i ima suprotan el. u polju K tj. $-a_i$ tada je prema tome svaka n-torka ima suprotnu n-torku ~~koja~~ koja leži u skupu K^n: K je polje – sabiranje u polju je komutativno

$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2, \ldots, b_n+a_n) =$

$= (b_1, b_2, \ldots, b_n) + (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dakle $(K^n, +)$ je abelova grupa

06. 11. '03.

1) Dokazati da je komutativnost sabiranja u vekt. prost. posljedica ostalih aksioma u vektorskom prostoru

2) Ako je V vekt. prostor nad poljem F dokazati da za $\forall a \in V$ važi:

i) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

ii) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

1) Rj:

$\forall a, b \in V \qquad (1+1)(a+b) = a+b+a+b$

$(1+1)(a+b) = 2(a+b) = 2a+2b = a+a+b+b$

$a+b+a+b = a+a+b+b$

pa je $\quad b+a = a+b$ – sabiranje kom.

2) Rj:

i) $0 \cdot \vec{a} = (0+0)\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a}$

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

ii) $(1+(-1)) \cdot \vec{a} = \vec{a} + (-1)\vec{a}$

$\vec{a} + (-1)\vec{a} = 0$

$(-1)\vec{a} = -\vec{a} \qquad$ važi $\forall \vec{a} \in V$

3) Dokazati da za $\forall$ prost br. P i $\forall n \in N$ postoji bar jedan vektorski prostor koji ima P^n elemenata.

Neka je P prost br. Prema onome što smo ranije rekli uređeni par $(Z_p, +)$ je abelova grupa a Z_p = skup klasa ostataka po mod P

Dalje smo pokazali da je $(Z_p \setminus \{0\}, \cdot)$ isto ~~tako~~ abelova grupa jer je P prost br. Prema tome $(Z_p, +, \cdot)$ je polje.

[illegible] $|Z_p| = p$

Sada su $Z_p = Z_p \times \dots \times Z_p$

$Z_p^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in Z_p,\ i = 1, \dots, n\}$

Uvedimo op. sabiranja ~~na~~ na slj. način

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ i množenje

sa elementima iz Z_p sa $\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

$\forall (a_1, \dots, a_n)$ i $(b_1, \dots, b_n)$

$(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) \in Z_p^n$ zato što je $\forall i = \overline{1,n}$ $a_i + b_i \in Z_p$ jer

je sabiranje klasa u Z_p zatvoreno.

Za svake tri n-torke $((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) + (c_1, \dots, c_n) =$

$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) + (c_1, \dots, c_n) = ((a_1+b_1)+c_1, \dots, (a_n+b_n)+c_n) =$

$= \underbrace{(a_1+(b_1+c_1), \dots, a_n+(b_n+c_n))}_{\text{asocijativnost}} = (a_1, \dots, a_n) + ((b_1, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_n))$

$(Z_p, +)$

$\bar{0} \in Z_p$ neutr. el. sabiranja je $(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \in Z_p^n$ zato što je

$(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ pa postoji neutr. el.

Uzmimo proizvoljnu n-torku $(a_1, \dots, a_n) \in Z_p^n$ $\forall a_i \in Z_p^n$

$\exists -a_i \in Z_p$ tako da je $a_i + (-a_i) = 0$

n-torka $(-a_1, \dots, -a_n) \in Z_p^n$ a za

$(a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) = (\bar{0}, \dots, \bar{0})$ $\forall$ n-torka iz Z_p^n ima svoj suprotni el.

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, \dots, b_n+a_n) =$

$= (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n)$ pa je $(Z_p^n, +)$ abelova grupa.

Slično se provjerava da važe i ostale osobine pa je prema tome

$(Z_p^n, +, \cdot)$ vekt. prost. nad poljem Z_p.

Prema tome skup Z_p^n ima onoliko el. koliko ima različitih n-torki

sa elementima iz skupa Z_p a pošto Z_p ima p elemenata, taj

broj je jednak broju varijacija n-te klase skupa od p

elemenata sa ponavljanjem, a to je jednako p^n. Skup

Z_p^n ima p^n elemenata pa smo i dokazali da postoji

polje od p^n elemenata pa je to v. prostor.

Def: Neka su $V_1, V_2, \dots, V_n$ vekt. prostori nad istim poljem F. Skup V uređenih n-torki $(v_1, \dots, v_n)$ gdje je $v_i \in V_i$ je također v. prostor nad poljem F sa op. def. sa $(v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$

$\alpha(v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$

Vektorski prostor V zovemo ~~vektorski~~ dekartov proizvod prostora $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ i označavamo sa $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

Neka je N podmodul modula M nad prstenom R, $a \in M$ proizvoljno. Stavimo da je $a + N = \{a + n \mid n \in N\}$. Dokazati da vrijedi:

a) $a \in a + N$

b) $(\forall a, b \in M)$ je $a + N = b + N$, $a - b \in N$

c) $(\forall a, b \in M)$ ili je $a + N = b + N$ ili je $a + N \cap b + N = \emptyset$

R.:

a) Pošto je N podmodul modula M to $0 \in N$. $a = a + 0 \in a + N$

b) pretp. da je $a + N = b + N$. To znači da $\exists n_1, n_2 \in N$ tako da je $a + n_1 = b + n_2 \Rightarrow a - b = n_2 - n_1$ pa pošto je N podmodul to razlika $n_2 - n_1 \in N$ što znači da je $a - b \in N$. Obrnuto, pretp. da je $a - b \in N$ to znači da $\exists n \in N$ tako da $a - b = n$. Neka je $x \in a + N$ proizvoljno. Znači da je x-oblika $a + n_1$ gdje n_1 leži u ... odnosno

$x = a + n$, $n \in N$

$x = b + \underbrace{n + n_1}_{n_2 \in N} = b + n_2 \in b + N$

To znači da je $a + N \subseteq b + N$. Uzmimo proizvoljno $x \in b + N$ tj. $x = b + n_1$, $n_1 \in N$. Pošto je $a - b = n \in N$ to je $0 - n = b - a \in N$ a to znači da je $b = a - n$. Sada je $x = b - \underbrace{n + n}_{n_2} = a + n_2 \in a + N$. Dakle $b + N \subseteq a + N$ pa sada iz ovoga imamo da je $a + N = b + N$

c) pretp. da nije $a + N \cap b + N = \emptyset$. To znači da postoji $x \in a + N \cap b + N$

To znači da je $x = a + n_1$, $x = b + n_2$, $n_1, n_2 \in N$

Pa je, $a + n_1 = b + n_2$ tj. $a - b = n_2 - n_1 \in N$ pa prema b) znači da je $a + N = b + N$

* Neka su $V = F^4$ i $W = F^{2\times 2}$ vektorski prostor nad poljem F. Dokazati da je preslikavanje $f((a_1,a_2,a_3,a_4)) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ izomorf. vekt. prostora V i W nad poljem F. Izomorf. vekt. prostora V u vekt. prostor W nad istim poljem F zovemo bijektivno preslikavanje $f: V \to W$ tako da je $\forall a,b \in V$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ i $\forall a \in V$ i $\alpha \in F$, $f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

Treba pokazati da je ovo preslikavanje (bijektivno) izomorf.

$$f((a_1,a_2,a_3,a_4)+(b_1,b_2,b_3,b_4)) = f(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4) =$$
$$= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = f((a_1,a_2,a_3,a_4)) + f((b_1,b_2,b_3,b_4))$$

Dalje $f(\alpha(a_1,a_2,a_3,a_4)) = f(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4) = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$
$= \alpha f(a_1,a_2,a_3,a_4)$ za $\forall \alpha \in R$ i $\forall$ dvije četvorke iz V.

- bijekcija

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in F^{2\times 2} = W$ $\forall a_i \in F$ $i = \overline{1,4}$ a to znači

$(a_1,a_2,a_3,a_4) \in F^4$ tako da $f(a_1,a_2,a_3,a_4) = A$ tj. f je surjektivno.

Sada pretp. da je $f((a_1,a_2,a_3,a_4)) = f((b_1,b_2,b_3,b_4))$ To znači da je:

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ a_3-b_3 & a_4-b_4 \end{bmatrix} = 0$ što znači da je:

$a_i - b_i = 0$ tj. $a_i = b_i$ $\forall i = \overline{1,4}$ pa su ove dvije četvorke $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (b_1,b_2,b_3,b_4)$. Ovo znači da je f injekcija pa iz svega zaključujemo da je ovo izomorf.

* Obrazložiti da li je R^2 podpr. prostora R^3 nad poljem realnih br.
$R^2 = \{(x,y) / x,y \in R\}$ i $R^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in R\}$. Očito je $R^2 \nsubseteq R^3$ jer ako je R^2 vekt. podp. nad R i R^3 vekt. pr. nad R.
Sa V označimo skup svih $\{(x,y,0) \mid x,y \in R\}$ $V \subseteq R^3$, i V je vekt. pr. nad poljem realnih br. (to dokazati sami!) Ako def. presl. f sa ~~...~~ $f: R^2 \to V$ a sa $f(x,y) = (x,y,0)$ onda je f bijektivno preslikavanje i $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) =$
$= (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1,y_1,0) + (x_2,y_2,0) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$ i za $\forall \alpha \in R$
$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, \alpha y, 0) = \alpha(x,y,0) = \alpha f(x,y)$ tj. R ...

izomorfan prostoru R^2 i V, dakle R^2 nije podpr. pro R^3 ali je izomorf. podprostor V prostora R^3

* Neka je F proizvoljno polje a $F[x]$ prsten polinoma u promjenjivoj x sa koeficijentima iz polja F. Dokazati da je $f(x)$ vektorski prostor nad polju F sa operacijama $+$ i $\circ$ iz F def. sa

$\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i = \sum_i (a_i + b_i) x_i$ i $\alpha \sum_i a_i x^i = \sum_i (\alpha a_i) x^i$. Pitanje da li je skup U svih polinoma p za koje je $p(1) = p(0)$ podprostor prostora $f(x)$. Isto pitanje i za skup V svih polinoma p za koje je $p(0) = 1$

Rj.:

1) Ako je $p(x) = \sum_i a_i x^i$, $a_i \in F$

$g(x) = \sum_i b_i x^i$, $b_i \in F$ $\forall i$, onda je $p(x) + g(x)$ def. sa $\sum_i (a_i + b_i) x^i = \sum_i c_i$

gdje je $c_i = a_i + b_i \in F$ pa suma $p(x) + g(x) \in F[x]$

2) $(p(x) + g(x)) + r(x) = (\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i) + \sum_i c_i x^i = \sum_i (a_i + b_i) x^i + \sum_i c_i x^i =$

$= \sum_i [(a_i + b_i) + c_i] x^i = \sum_i (a_i + (b_i + c_i)) x^i = \sum_i a_i x_i + (\sum_i b_i x^i + \sum_i c_i x^i) =$

$= p(x) + (g(x) + r(x))$

3) $\forall a \in F$, $\theta \in F[x]$: $0 \in F[x]$, $\forall p(x) \in F[x]$

$p(x) + 0 = \sum_i a_i x^i + \sum_i 0 \cdot x^i = \sum_i (a_i + 0) x^i = \sum_i a_i x^i = p(x)$

4) Uzmimo polinom $p(x) = \sum_i a_i x^i$

$a_i \in F$ $\forall i$ $\exists -a_i \in F$ definišemo li polinom

$-p(x) = \sum_i (-a_i) x^i$ onda ~~na~~ taj polupreačnik pripada $F[x]$ osim toga vrijedi da je $p(x) + (-p(x)) = \sum_i a_i x^i + \sum_i (-a_i) x^i = \sum_i (a_i + (-a_i))$

$= \sum_i 0 \cdot x^i = 0$ i za svaki drugi polinom $p(0) + g(x) \in F(x)$

5) $p(x) + g(x) = g(x) + p(x)$

---

1) $\alpha, \beta \in F$ $p(x) \in F[x]$

$(\alpha + \beta) p(x) = (\alpha + \beta) \sum_i a_i x^i = \sum_i (\alpha + \beta) x^i = \sum_i \alpha a_i x^i + \sum_i \beta a_i x^i = \alpha p(x) + \beta$

2) $(\alpha, \beta) \sum_i a_i x^i = \sum_i (\alpha \beta) a_i x^i = \sum_i \alpha (\beta a_i) x^i = \alpha \sum_i \beta a_i x^i = \alpha (\beta \sum_i a_i x^i)$

Važi. Dak.

3)
$\alpha(p(x)+g(x)) = \alpha(\sum_i a_i \cdot x^i + \sum_i b_i \cdot x^i) = \alpha \sum_i (a_i + b_i) x^i = \sum_i (\alpha a_i + \alpha b_i) x^i =$
$= \alpha \sum_i a_i \cdot x^i + \alpha \sum_i b_i \cdot x^i = \alpha p(x) + \alpha g(x)$

4) ako je $1 \in F$ neutr. el. u odnosu na $\cdot$ onda je
$1 \cdot p(x) = 1 \sum_i a_i \cdot x^i = \sum_i 1 \cdot a_i \cdot x^i = \sum_i a_i \cdot x^i = p(x)$

Zaključak: $F[x]$ je vekt. pr. nad polje F ~~[illegible]~~

$M = \{ p(x) \in F[x] \mid p(1) = p(0) \}$

$p(0) = p(1)$

$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 0}_{a_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1$
$= \sum_{i=1}^{n} a_i$

$a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_0$

$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$

Npr. polinom $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^2 - 5x + 7$ je polinom iz skupa U ako je $F = R$ za $\forall a \in F$ $a \in U$ pa je $M \neq \emptyset$. Neka $p(x)$ i $g(x) \in U$ tj. $p(0) = p(1)$ i $g(0) = g(1)$ tada je $p(0) + g(0) = (p+g)(0) = (p+q)(1) =$ $= p(1) + g(1)$ i ako uzmemo $\alpha \in R$ tako da je $\alpha P(0) = \alpha P(1)$ pa je i $(\alpha p)(0) = (\alpha p)(1)$ tj. $p+g$ i $\alpha p \in U$ što znači da je M vekt. podpr. prostora $F[x]$

$V = \{ p(x) \mid p(0) = \cancel{[illegible]} \}$ to su svi polinomi čiji je posljednji član $a_0 = 1$
$V \neq \emptyset$ $1 \in V$

Ako je $p(0) = 1$, $g(0) = 1$ onda je $p(0) + g(0) = 2$ pa $p + g \notin V$

* Neka je F proizvoljno polje i A proizvoljan skup. Označimo sa F^A skup svih funkcija sa skupa A u polje F. Ako u F^A def. sabiranje i množenje elemenata iz R sa $(f+g)a = f(a) + g(a)$ i $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$ gdje je $a \in F$, $\alpha \in F$, $f \in F^A$ onda $f(a)$ postaje v.p. nad polje F. Dokazati!

Ako je $T: A \to B$ bilo koja bijekcija skupa A na skup B, dokazati da je $sa f \to f \cdot T$ def. izomorfizam prostora F^A u F^B tj. da su ova dva prostora izomorfizam

Zad.

Neka su $f, g \in F^A$ proizv. treba pokazati da su $f+g$ i αf fje sa A u F
to znači ako je $a=b$ i $a, b \in F$ onda je $f(a)=f(b)$ i $g(a)=g(b)$
tj. original može imati dvije različite slike tj. $(f+g)a=(f+g)b$
pa je $(f+g)$ stvarno fja $A \to F$ i $\alpha f(a)=\alpha f(b)$ pa je $\alpha f: A \to B$ dalje
Ako su $f, g, h \in F^A$ onda je za $\forall a \in A$

2) $((f+g)+h)(a)=(f(a)+g(a))+h(a)=f(a)+(g(a)+h(a))=(f+(g+h))(a)$
pa je $(f+g)+h=f+(g+h)$

3) $\sigma: A \to F$

$\sigma(a)=0 \quad f(a) \in F$

tada za f fju $f \in F^A$ uvijek da je $(f+\sigma)(a)=f(a)+\sigma(a)=f(\sigma)$
za $\forall a \in A$ pa je $f+\sigma=f$ dalje uzmimo pravo $f \in F^A$ i def.
fju $-f: A \to F$ tako što ćemo staviti $-f(a)=-f(a) \ \forall (a \in A)$
tako će biti $-f+f=\sigma$ (nekao fja) i konačno

4) $f+g=g+f \quad \forall f, g \in F^A$

ostale aksiome provjeriti sami
zaključak F^A je vekt. prostor nad poljem F
dovršiti ovo

** $\pi: A \to B$ π je bijekcija, treba pokazati da je F^A izomorfno s F^B.

Def. preslikavanje $H: F^B \to F^A$ sa $H(f)=f \circ \pi$ mi trebamo pokazati da je H izomorfizam.

$(H(f+g))(a)=((f+g)\circ\pi)(a)=(f+g)(\pi(a))=f(\pi(a))+g(\pi(a))=$
$=(f\circ\pi)(a)+(g\circ\pi)(a)=H(f)(a)+H(g)(a)=(H(f)+H(g))(a)$ za
$\forall a \in A$ to ima da je $H(f+g)=H(f)+H(g)$ za svake dvije fje
$f, g \in F^B$ Dalje uzmimo α iz polja F proizvoljno i posmatrajmo
šta se dalje dešava sa:

$(H(\alpha f))(a)=((\alpha f)\circ\pi)(a)=(\alpha f)(\pi(a))=\alpha(f(\pi(a)))=(\alpha(Af)))(a)$ $\in B$

$\forall a \in A$ pa je $H(\alpha f)=\alpha H(f)$ za $\forall f \in F^B$ Dokažimo još da je H
bijekcija. Uzmimo proizv. fju $f_A \in F^A$ onda tražimo fju $H(f)$
tako da je $H(f)=f_A \quad f\circ\pi=f_A$

$f=f_A\circ\pi^{-1}$

$\pi: A \to B$

$\pi^{-1}: B \to A \qquad f=f_A\circ\pi^{-1} \in F^B$

$H(f)=(f\cdot\pi)=(f_A\circ\pi^{-1})\pi=f_A$

ostaje da se pokaže da je preslikavanje f def. na ovaj način tj
da jedan original može imati dvije različite slike. Uzmimo
$b_1=b_2 \in B \quad \pi^{-1}(b_1)=\pi^{-1}(b_2)$ pa posto je
$f_A\circ\pi^{-1}(b_1)=f_A\circ\pi^{-1}(b_2)$ tj $f(b_1)=f(b_2)$ pa ovo sad pokazali
da je preslikavanje H surjekcija još injekcija pa neka je
$H(f)=H(g) \quad f, g \in F^B$ to znači da je $(f\circ\pi)(a)=(g\circ\pi)(a)$
$(\forall a \in A)$ pa je $f(\pi(a))=g(\pi(a))$ to znači $f=g$ jer je
π fja bijektivna i dobro def. pa je $f=g$
i H je bijekcija na slupu H je izomorfizam pa je
$F^A \cong F^B$ – izomorfno

13.11.'03.

Suma i presjek podmodula. Direktna suma. Komplement.

Def: Neka je $(S_i)_{i\in I}$ familija podmodula R modula V. Presjek $S = \bigcap_{i\in I} S_i$ podmodula je opet podmodul R modula V. To je najveći podmodul koji je sadržan u svakom od podmodula $(S_i)(i\in I)$ i zove se presjek podmod. S_i. Skup $T = \sum_{i\in I} S_i$ svih el. $x\in V$ koji se mogu napisati u obliku sume bar jedne familije $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in S_i (\forall i\in I)$ predstavlja R-podmod. modula V. To je najmanji podmodul modula V koji sadrži sve podmodule S_i i zove se suma podmodula S_i.

Def: Za sumu $\sum_{i\in I} S_i$ podmodula S_i R modula V kaže se da je direktna ako je $\forall x$ iz te sume jednako sumi tačno jedne familije $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in S_i$ $(i\in I)$.

Def: Neka je S podmodul modula V. Za podmodul T modula V reći ćemo da je komplement podmodula S ako je suma $S+T$ direktna i daje cijeli modul V. Tj. $S\oplus T = V$

* Neka su U i V podprostori prostora $\mathbb{R}^4$ generisani skupovima vektora $\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\}$ i $\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\}$. Odrediti baze prostora $U+V$ i $U\cap V$.

Rj:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bazu prostora U čine vektori $(1,1,0,-1)$ i $(0,1,3,1)$ to znači $\dim U = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bazu prostora V čine v. $(1,2,2,-2)$ i $(0,-1,-2,1)$ i $\dim V = 2$.

$U+V$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baza $U+V$ je $(1,1,0,-1),(0,1,3,1),(0,0,-1,-2)$ i $\dim(U+V)=3$

$U\cap V$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & y-x & z & t+x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3x-3y+z & 2x-y+t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x-3y+z=0 \\ 2x-y+t=0 \end{cases}$$ homogeni sist. jed. čiji je skup rj. prostor U

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & y-2x & z-2x & t+2x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2y+z+2x & t+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y+z+2x=0 \\ t+y=0 \end{cases}$$ -11- prostor V

$U\cap V$ je skup rješenja sist.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-3y+z=0 \\ 2x-y+t=0 \\ -2y+z+2x=0 \\ t+y=0 \end{array}\right\} \quad \underline{t=-y} \quad \left.\begin{array}{l} 3x-3y+z=0 \\ 2x-2y=0 \\ -2y+z+2x=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{x=y=-t} \quad \boxed{z=0}$$

Rj. $(x,x,0,-x)$

$U\cap V = [(x,x,0,-x)]$

Jedna od baza: $\{(1,1,0,-1)\}$ i $\dim(U\cap V)=1$

$$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U\cap V)$$
$$2 + 2 = 3 + 1$$

* Dokazati da polinomi $(1-x)^3$, $(1-x)^2$, $1-x$, 1 generišu prostor polinoma stepena manjeg ili jednakog 3 u jednoj promjenljivoj iz polja realnih brojeva.

Rj: Opšti oblik polinoma ax^3+bx^2+cx+d $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

$$ax^3+bx^2+cx+d = \alpha(1-x)^3+\beta(1-x)^2+\gamma(1-x)+\delta =$$
$$= \alpha(1-3x+3x^2-x^3)+\beta(1-2x+x^2)+\gamma(1-x)+\delta =$$
$$= \alpha-\underline{3\alpha x}+\underline{3\alpha x^2}-\underline{\alpha x^3}+\beta-\underline{2\beta x}+\underline{\beta x^2}+\gamma-\underline{\gamma x}+\delta =$$
$$= -\alpha x^3+x^2(3\alpha+\beta)-x(3\alpha+2\beta+\gamma)+\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

$$-\alpha = a$$
$$3\alpha+\beta = b$$
$$-3\alpha-2\beta-\gamma = c$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = d$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ sist. ima rj. tj. uvijek možemo odrediti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ pa se svaki polinom može izraziti preko njih. tj. dokazali smo tvrdnju.

* Neka je U podprostor prostora $\mathbb{R}^5$ generisan vektorima $\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\}$ a V podprostor generisan vektorima $\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\}$. Odrediti baze $U+V$ i $U\cap V$

Rj:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 13 & -6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $U=\{(1,3,-2,2,3),(0,1,-1,2,-1)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ $V=\{(1,3,0,2,1),(0,2,-6,4,2)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$U+V = [(1,3,-2,2,3),(0,1,-1,2,-1),(0,0,2,0,-2)]$

$\dim(U+V) = 3$

$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-3 = \underline{\underline{1}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ x & y & z & s & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & y-3x & z+2x & s-2x & t-3x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & y+z-x & s-2x+6x-y & t+y-6x \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y+z-x &= 0 \\ s+4x+\cancel{ay} &= 0 \\ t+y-6x &= 0 \end{aligned}\right\} U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ x & y & z & s & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & y-3x & z & s-2x & t-x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9x-3y+z & 4x-2y+s & 2x-y+t \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 9x-3y+z &= 0 \\ 4x-2y+s &= 0 \\ 2x-y+t &= 0 \end{aligned}\right\} V$$

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z &= 0 \\ 4x-y+s &= 0 \\ -6x+y+t &= 0 \\ 9x-3y+z &= 0 \\ 4x-2y+s &= 0 \\ 2x-y+t &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y &= 2x+t \\ x+z+t &= 0 \\ 2x+s+t &= 0 \\ -4x+2t &= 0 \\ 3x-3t+z &= 0 \\ 2t+s &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} s &= 2t \\ x+z+t &= 0 \\ 2x+t &= 0 \\ \cancel{-4x+2t} &= 0 \\ 3x-3t+z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} t &= -2x \\ -x+z &= 0 \end{aligned}$$

(negdje je greška mala)

treba dobiti da ima netr. rj. i jedna promjenjiva je parametar (kao ranije)

* Dokazati da su u v. p. funkcija jedne realne promj. vektori $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lin. nez. akko postoje realni br. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da je

$\det[f_i(a_j)]$ $1\le i,j\le n$ različita od nule.

Rj:

Pretp. da je $\det[f_i(a_j)] \neq 0$ za $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

(1) $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 f_1(a_1) + \lambda_2 f_1(a_2) + \dots + \lambda_n f_1(a_n) = 0 \\ \lambda_1 f_2(a_1) + \lambda_2 f_2(a_2) + \dots + \lambda_n f_2(a_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1 f_n(a_1) + \lambda_2 f_n(a_2) + \dots + \lambda_n f_n(a_n) = 0\end{array}\right\}$$

sist. ima samo trivijalno rj.

pa je za svaki izbor brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

jedino rj. sist.

pa iz jednakosti (1) $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ što znači da su vekt. $f_1, \dots, f_n$ lin. nez.

Obratno: Pretp. da su vekt. lin. nez. i dokažimo da je det $\neq 0$

Indukcija:

1° $n = 1$ $\quad a_1 \in \mathbb{R}$

$f_1(a_1) \neq 0$ $\quad$ W

2° pretp. da vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$

. $f_1, f_2, \dots, f_k$ - lin nez.

$\det[f_i(a_j)] \neq 0 \quad 1 \leq i, j \leq k$

3°

Pretp. da su $f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}$ lin. nez. i posmatrajmo det.

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_k) & f_1(\cancel{a_{k+1}}) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_k) & f_2(\cancel{a_{k+1}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & f_k(a_2) & \dots & f_k(a_k) & f_k(\cancel{a_{k+1}}) \\ f_{k+1}(a_1) & f_{k+1}(a_2) & \dots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{vmatrix} = \qquad A_i \in \mathbb{R}$$

$= A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \dots + A_{k+1} f_{k+1}(x) \; (= 0)$

pretp. da je det. jednaka 0.

Imamo da je $A_1 = 0, A_2 = 0 \dots A_{k+1} = 0$

$A_{k+1} = \det[f_i(a_j)] \; 1 \leq i, j \leq k$ koja je $\neq 0$ - kontradikcija.

Dakle postoje $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ tako da je $\det[f_i(a_j)] \neq 0 \quad 1 \leq i, j \leq k+1$

Na osnovu principa indukc. to vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$.

* Neka su U i V v.p. prostora R^3, generisani sa v.

$U=[(a,b,c) : a=b=c]$ $V=[(a,b,c)]$

Pokazati da je $U \oplus V = R^3$
direktna suma

Rj:

$x \in U \cap V$

$x=(a,b,c)$

$x=(a,a,a)$ $(a,b,c)=(a,a,a)$

$a=0=b=c$

$x \in U \cap V \Rightarrow x = 0_V$

$U \cap V = \{0_V\}$

$$x=(a,b,c) = \underbrace{(a,a,a)}_{\in U} + \underbrace{(0,b-a,c-a)}_{\in V}$$

$R^3 = U \oplus V$

*

Neka su u prostoru R^4 dati podprostori $U=[(1,1,1,1),(-1,-2,0,1),(1,0,2,3)]$ i $V=[(-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)]$. Dokazati da je $R^4 = U \oplus V$ i odrediti projekciju vektora $a=(4,2,4,4)$ na podpr. U paralelno sa V.

Rj:

$\dim V = 2$ $\dim R^4 = 4$

$$U \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim U = 2$$

$x \in U \cap V$

$x \in U \Rightarrow x = a\cdot(1,1,1,1) + b(-1,-2,0,1)$

$x \in V \Rightarrow x = c(-1,-1,1,-1) + d(2,2,0,1)$

$a(1,1,1,1) + b(-1,-2,0,1) = c(-1,-1,1,-1) + d(2,2,0,1)$

$(a-b, a-2b, a, a+b) = (-c+2d, -c+2d, c, -c+d)$

$$\left.\begin{array}{l} a-b+c-2d=0 \\ a-2b+c-2d=0 \\ a-c=0 \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c \\ 2a-b-2d=0 \\ 2a-2b-2d=0 \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow b=0 \quad \left.\begin{array}{l} 2a-d=0 \\ 2a-2d=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=0 \\ a=0 \end{array}$$

Sist. ima samo triv. rj. $(0,0,0,0)$

Znači: $U \cap V = \{0_V\}$

$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$

$2+2 = \dim(U+V) + 0$

$\dim(U+V) = 4$ pa je

$\underline{U \oplus V = \mathbb{R}^4}$

Projekcija:

$a = v + u \xrightarrow{} \text{projekcija}$ $\quad v \in V$, $u \in U$

$(4,2,4,4) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(-1,-2,0,1) + \gamma(-1,-1,1,-1) + \delta(2,2,0,1)$

$(4,2,4,4) = (\alpha-\beta-\gamma+2\delta, \alpha-2\beta-\gamma+2\delta, \alpha+\gamma, \alpha+\beta-\gamma+\delta)$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta-\gamma+2\delta=4\\ \alpha-2\beta-\gamma+2\delta=2\\ \alpha+\gamma=4\\ \alpha+\beta-\gamma+\delta=4\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=4-\gamma\\ -\beta-2\gamma+2\delta=0\\ -2\beta-2\gamma+2\delta=-2\\ \beta-2\gamma+\delta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta=2\gamma-\delta\\ -4\gamma+3\delta=0\\ \cancel{\ldots}\\ 3\gamma-2\delta=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}-8\gamma+6\delta=0\\ 9\gamma-6\delta=3\end{array}$$

$\gamma=3$, $\delta=4$, $\beta=2$, $\alpha=1$

$\underline{u} = (1,1,1,1) + 2(-1,-2,0,1) = \underline{(-1,-3,1,3)}$ – projekcija na U paral. sa V

(postupak je dobar, ali ima računska greška, ispraviti) (možda)

a nije greška !!! dobar zadatak...

*

Dokazati da je v.p. $\mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratnih matrica reda n nad poljem realnih br. direktna suma prostora simetričnih i kososimetričnih matrica. Naći projekciju matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
na svakih od tih prostora paralelno onom drugom.

Rj:
S - simetrične
K - antisim. matrice
formata $n\times n$ na polju real. br.

$A \in S \quad (a_{ij})_{n\times n} \in A \qquad a_{ij} = a_{ji}, \ i,j = \overline{1,k}$

$A \in K \quad (a_{ij})_{n\times n} \in K \qquad a_{ij} = -a_{ji}, \ i,j = \overline{1,k}$

Ako

$A \in S \cap K \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \wedge a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji} \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$\Downarrow$

$a_{ij} = 0 \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

$A \in S \cap K \Rightarrow A = O$

$S \cap K = \{O\}$

$A \in S \quad A^T = A$

$A \in K \quad A^T = -A$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{C}$ onda

$$B^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$$

$B \in S$

$$C^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -C$$

$C \in K$

Svaka matrica se može napisati kao zbir sim. i antisim. tj $\mathbb{R}^{n \times n} = S \oplus K$.

Proj. matrice A na S paral. sa K je B

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & & & \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Proj A na K par. sa S je C (radi sam)!!

* Neka je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup indeksa.

Dokazati da je $\sum_{i \in I} S_i$ direktna akko vrijedi

$S_j \cap (S_1 + S_2 + \cdots + S_{j-1}) = \{0_V\} \quad j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ (sami)!!!

$\Leftarrow$ Dokažimo da se $\vec{0}$ može napisati samo kao suma nula.

$0_V = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in \sum_{i \in I} S_i \quad x_i \in S_i, \; i = \overline{1,n}$

$-x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \in S_n \cap (S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}) = \{0_V\}$

$x_n = 0_V$ i

$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0_V$

$-x_{n-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} \in S_{n-1} \cap (S_1 + S_2 + \dots + S_{n-2}) = \{0_V\}$

$x_{n-1} = 0_V$

$\vdots$

$x_2 = 0_V$

$x_1 = 0_V$

što znači da se 0_V može napisati na jedinstven način kao zbir 0_V što znači da je suma direktna na osnovu teoreme -neke iz Pepića

20. 11. '03.

Efektivno rješavanje problema vezanih za lin. zavisnost vektora u konačnom vektorskom prostoru

1) Neka je $V = \mathbb{R}^4$ $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

a) odrediti bazu podprostora S generisanog vektorima $a_1 = (0,1,0,3)$ $a_2 = (2,0,1,3)$, $a_3 = (4,1,2,9)$

b) Neka je T podprostor prostora V generisan vektorima $a_4 = (2,1,1,6)$, $a_5 = (2,1,1,5)$. Odrediti dimenziju $S \cap T$ i bazu prostora $S \cap T$.

c) Za podprostor S odrediti komplement $\bar{S}$

Rj.: a) $b_1 = a_2 = (2,0,1,3)$ (prvi komponent gdje mu je prvi broj $\neq 0$)

$a_3' = a_3 - 2^{-1} \cdot 4 \cdot a_2 = (4,1,2,9) - (4,0,2,6) = (0,1,0,3)$

$b_2 = a_1 = (0,1,0,3)$

$a_3'' = a_3' - 1 \cdot 1^{-1} \cdot b_2 = (0,0,0,0)$

$S = [(2,0,1,3),(0,1,0,3)]$ $\dim S = 2.$

b.)

$a_4 = c_1 = (2,1,1,6)$

$a_5' = a_5 - 2 \cdot 2^{-1} \cdot a_4 = (2,1,1,5) - (2,1,1,6) = (0,0,0,-1)$

~~$a_4 = \dots (2,1,1,6)$~~

$a_5' = c_2$ $\therefore$ $T = [c_1, c_2]$ $\dim T = 2$

Odredimo dim. prostora $S+T$:

$b_1 = (2,0,1,3)$

$b_2 = (0,1,0,3)$

$b_3 = c_1 = (2,1,1,6)$

$b_4 = c_2 = (0,0,0,-1)$

$d_1 = b_1 = (2,0,1,3)$

$b_2' = b_2 - 2^{-1} \cdot 0 \cdot d_1 = b_2$

$b_3' = b_3 - 2^{-1} \cdot 2 \cdot d_1 = (2,1,1,6) - (2,0,1,3) = (0,1,0,3)$

$b_4' = b_4 - 2^{-1} \cdot 0 \cdot d_1 = (0,0,0,-1)$

$d_2 = b_2' = (0,1,0,3)$

$b_3'' = b_3 - 1 \cdot 1^{-1} \cdot d_2 = (0,1,0,3) - (0,1,0,3)$

$b_4'' = b_4' - 1^{-1} \cdot 0 \cdot d_2 = (0,0,0,-1)$

$d_3 = b_4'' = (0,0,0,-1)$ $\qquad \dim(S+T) = 3$

$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$

$\dim(S \cap T) = 1$

Odrediti bazu prostora $S \cap T$:

$f \in S \cap T$

$f = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \quad ; \quad f = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2$

$\beta_1 (2,0,1,3) + \beta_2 (0,1,0,3) = \gamma_1 (2,1,1,6) + \gamma_2 (0,0,0,-1)$

$(2\beta_1, \beta_2, \beta_1, 3\beta_1 + 3\beta_2) = (2\gamma_1, \gamma_1, \gamma_1, 6\gamma_1 - \gamma_2)$

$2\beta_1 = 2\gamma_1$

$\beta_2 = \gamma_1$ $\qquad f = (2,0,1,3) + (0,1,0,3) = (2,1,1,6)$

$\beta_1 = \gamma_1$ $\qquad f$ - čini bazu prostora $S \cap T$

$3\beta_1 + 3\beta_2 = 6\gamma_1 - \gamma_2$

$\gamma_2 = 0$

c) Bazu prostora S čine vektori $b_1 = (2,0,1,3)$, $b_2 = (0,1,0,3)$

$\dim S = 2$

$\dim \bar{S} = 2$

Tražimo $\bar{S}$ tako da je $\bar{S} \oplus S = V$, $\bar{S} \cap S = \{0_V\} \Rightarrow \dim \bar{S} \cap S = 0$

$\dim \bar{S} + S = 4$

b_1, b_2, e_1, e_2 - da li su ovi vektori lin. nezavisni

$$\alpha(2,0,1,3)+\beta(0,1,0,3)+\gamma(1,0,0,0)+\delta(0,1,0,0)=(0,0,0,0)$$

$2\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0$

$\beta+\delta=0 \Rightarrow \delta=0$

$\alpha=0$

$3\alpha+3\beta=0 \Rightarrow \beta=0$

b_1, b_2, e_1, e_2 su lin. nezavisni pa slijedi da je $\bar{S}\cap S=\{0_V\}$

$S=[e_1,e_2]$

2) Neka je U podprostor prostora R^5 generisan vektorima $a_1=(1,3,-2,2,3)$ $a_2=(1,4,8,-3,4,2)$, $a_3=(2,3,-1,-2,9)$, a V generisan vektorima $\alpha_1=(1,3,0,2,1)$, $\alpha_2=(1,5,-6,6,3)$, $\alpha_3=(2,5,3,2,1)$

Odrediti baze prostora $U+V$ i $U\cap V$

Stavimo da je b_1 prvi od vektora gdje mu je prva komponenta $\neq 0$

$b_1=a_1=(1,3,-2,2,3)$

$a_2'=a_2-1^{-1}\cdot 1\cdot b_1$ → prva komponenta od a_2

$a_2'=(1,4,-3,4,2)-(1,3,-2,2,3)=(0,1,-1,2,-1)$

$a_3'=a_3-1^{-1}\cdot 2\cdot b_1=(2,3,-1,-2,9)-(2,6,-4,4,6)=(0,-3,3,-6,3)$

biramo vektor gdje je druga komponenta $\neq 0$ jer je prva u obaje $=0$

$b_2=a_2'=(0,1,-1,2,-1)$

$a_3''=a_3'-1^{-1}\cdot(-3)\cdot b_2=(0,-3,3,-6,3)+(0,3,-3,6,-3)=(0,0,0,0,0)$

0_V - nije nikada bio u bazi pa ovdje završavamo tj. $[b_1,b_2]=U \Rightarrow \dim U=2$.

Isto radimo i sa V

$\beta_1=(1,3,0,2,1)=\alpha_1$

$\alpha_2'=\alpha_2-1^{-1}\cdot 1\cdot\beta_1=(1,5,-6,6,3)-(1,3,0,2,1)=(0,2,-6,4,2)$

$\alpha_3'=\alpha_3-1^{-1}\cdot 2\cdot\beta_1=(2,5,3,2,1)-(2,6,0,4,2)=(0,-1,3,-2,-1)$

β_2 - biramo iz skupa α_2' i α_3'' i on je $=\alpha_2'$

$\beta_2=(0,2,-6,4,2)=\alpha_2'$

$\alpha_3''=\alpha_3'-2^{-1}\cdot(-1)\beta_2=(0,-1,3,-2,-1)+(0,1,-3,2,1)=(0,0,0,0,0)$

$V=[\beta_1,\beta_2]$ $\dim V=2$

$c_1 = (1,3,-2,2,3)$ $\gamma_1 = (1,3,-2,2,3)$

$c_2 = (0,1,-1,2,-1)$

$c_3 = (1,3,0,2,1)$

$c_4 = (0,2,-6,4,2)$

$c_2' = c_2 - 1^{-1} \cdot 0 \cdot \gamma_1 = (0,1,-1,2,-1)$

$c_3' = c_3 - 1^{-1} \cdot 1 \cdot \gamma_1 = (0,0,2,0,-2)$

$c_4' = c_4 - 1^{-1} \cdot 0 \cdot \gamma_1 = (0,2,-6,4,2)$

$\gamma_2 = c_2' = (0,1,-1,2,-1)$

$c_3'' = c_3' - 1^{-1} \cdot 0 \cdot \gamma_2 = (0,0,2,0,-2)$

$c_4'' = c_4' - 1^{-1} \cdot 2 \cdot \gamma_2 = (0,2,-6,4,2) - (0,2,-2,4,-2) = (0,0,-4,0,4)$

$\gamma_3 = c_3'' = (0,0,2,0,-2)$

$c_4''' = c_4'' - 2^{-1} \cdot (-4) \cdot \gamma_3 = (0,0,-4,0,4) + (0,0,4,0,-4) = (0,0,0,0,0)$

$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ $U+V$ $\dim U+V = 3$

AFIN PODPROSTOR

Def: Neka je V bilo koji vekt. prostor nad poljem K. Njegova translacija fiksan vektor $\vec{a}$ je preslikavanje $T_a: V \to V + \vec{a}$. Ako je U vektorski podprostor od V onda je to njegova slika $\vec{a} + U = \{a+u \mid u$ pri toj translaciji akko $a \in U$ tj. $a + U = U$

Ako je $a+U$ podprostor onda $0_V \in a+U$ tj. $\exists u \in U$ $a+u = 0_V \Rightarrow a = -u \in$

1. ako je W podprostor prostora V onda $\forall a,b \in V$ važi da je $a+U = b+W$ akko je $U = W$, $a-b \in U$

Ako je $a+U = b+W \Rightarrow (a-b)+U = W \Rightarrow a-b \in U$, $W = U$

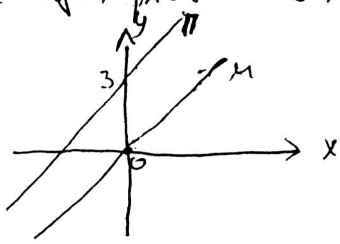
Ako je podskup Π translacije bar jednog vekt. prostora U za neki od vektora $a \in V$ onda je taj podprostor određen jednoznačno pa $\forall \vec{a} \in V$ važi $\Pi = a + U$ akko $a \in \Pi$. U ovom slučaju skup Π zovemo afin podprostor ili linearnom mnogostrukošću prostora a sam vektorski podprostor U njegovom direktrisom

Primjer: Neka je Π skup svih rješenja jednačine $2x-y+3=0$ nad poljem realnih brojeva oblika $\Pi = \{(\alpha, 2\alpha+3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$a = (0,3) \in \Pi$

Stavimo $\mathcal{U} = \Pi - a = \{(\alpha, 2\alpha+3) - (0,3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Π je afin prostor sa direktrisom U. U je skup svih rješenja jedn. $2x-y=0$



* Dokazati da je skup rješenja sistema jednačina

$$3x-y+2z-3=0$$
$$2x+3y+z+4=0$$
$$-2x-7y-11=0$$

afin prostor prostora $\mathbb{R}^3$ i odrediti njegovu direktrisu

Rj:

$x=-7y-11$

$-21y-33-y+2z-3=0$

$-14y-22+3y+z+4=0$

$-22y+2z-36=0$
$-11y+z-18=0$ } lin. zavisne jedn.

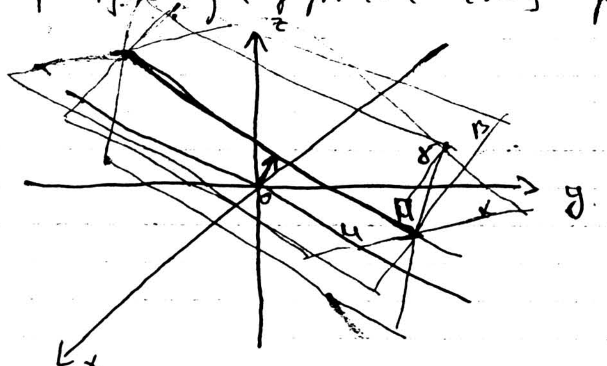
$z=11y+18$

$x=-7y-11$

Π - skup rješenja ovog sistema

$\Pi = \{(-7\alpha-11, \alpha, 11\alpha+18) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

skup rješenja je prava zbog jedne nepoznate, da je bilo α, β, bila bi ravan



sijeku se 3 ravni po jednoj pravoj

$\vec{a} = (-11, 0, 18)$

$\alpha = 0 \quad (-11, 0, 18) \quad A$

$\alpha = -1 \quad (-4, -1, 7) \quad B$

jednačina prave Π

$$\frac{x+4}{-7} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-7}{11}$$

$$U: \frac{x}{-7} = \frac{y}{1} = \frac{z}{11}$$

2) Presjek dva afina podprostora $\Pi = a+U$ i ~~[illegible]~~ $\Gamma = b+W$ istog vektorskog prostora V je ili prazan ili određen afinim podprostorom sa direktrisom $U \cap W$. Dokazati!

3) Ako su $\Pi = a+U$ i $\Gamma = b+W$ afini podprostori vekt. prostora V sa kojeg je $V = U \oplus W$, dokazati da njihov presjek $\Pi \cap \Gamma$ mora biti jednočlan.

---

2) Rj:

$\Gamma \cap \Pi \neq \emptyset$

$c \in \Pi \cap \Gamma$

$c \in \Pi \qquad \Pi = c+U$

$c \in \Gamma \qquad \Gamma = c+W$

Uzmimo $v \in \Pi \cap \Gamma$

$v = c+u \quad u \in U$; $v = c+w$, $w = W$

$\cancel{c}+u = \cancel{c}+w$

$u = w \in U \cap W$ tj. ako $v \in \Pi \cap \Gamma$ onda je $v = c+u$, $u \in U \cap W$, pa je $\Pi \cap \Gamma = c+(U \cap W)$ a ovo je afin prostor sa direktrisom $U \cap W$.

3) Rj.:

Pretpostavimo da je $U \oplus W = V$ tj. $U \cap W = \{0_V\}$ ako $v \in \Gamma \cap \Pi$ onda na osnovu zadatka 2 V. je oblika $v = c+u$, $u \in U \cap W$, $c \in \Gamma \cap \Pi$ (proizvoljan)

Pošto je $U \cap W = \{0_V\}$ to znači da je $u = \{0_V\}$ tj. $v = c$

$\Gamma \cap \Pi = \{c\}$

HOMOMORFIZMI MODULA I ALGEBRA

Def: Neka su V i V' moduli nad istim prstenom R. Preslikavanje $f: V \to V'$ zove se homomorfizam modula ako vrijedi:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in V, \alpha \in R$$
$$f(\alpha x) = \underline{\alpha f(x)}$$

*) Ako je S podmodul modula V, a f homomorfizam sa V u V' ($f \in hom(V,V')$) tada se ograničenjem preslikavanja $f \to S$ dobija $f_S \in hom(S,V')$. Dokazati:

a) ako postoji komplement T podmodula S tada svaki $g \in hom(S,V')$ ima oblik $g = f_S$ za neko $f_S \in hom(S,V)$ odnosno za neko $f \in hom(V,V')$

b) Ako je V direktna suma podmodula S_i, $i \in I$, a $g_i \in hom(S_i, V')$ $(i \in I)$ tada postoji tačno jedno $f \in hom(V,V')$ gdje je $g_i = f|_{S_i}$ $(i \in I)$.

c) Ako su S i T podmoduli modula V takvi da postoji komplement T' modula $S+T$ tada postoji bar jedno f, a u slučaju da je $S+T=V$ tačno jedno f, $f \in hom(V,V')$, za koje je $f_S = g$, $f_T = h$ (f restrikcija sa T na h). Ako za date homomorfizme $g \in hom(S,V)$, $h \in hom(T,V')$ gdje je $h(x) = g(x)$ $\forall x \in S \cap T$.

<u>Rj:</u>

a) Pretp. da je T komplement modula S u modulu V, to znači da je $S \oplus T = V$, uzmimo proizvoljno $g \in hom(S,V')$. Neka je $h \in hom(T,V')$. Ako je $x \in V$ onda $x = s+t$, $s \in S$, $t \in T$. Definišimo $f \in hom(V,V')$ tako da je $f(x) = f(s+t) = g(s) + h(t)$ $\forall x \in V$.

Pokažimo da je f dobro definisano.

$x_1 = x_2$, $s_1 + t_1 = s_2 + t_2$, $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$.

g, h su homomorfizmi pa su sigurno dobro definisani

$g(s_1) = g(s_2)$, $h(t_1) = h(t_2)$

$f(x_1) = g(s_1) + h(t_1) = g(s_2) + h(t_2) = f(s_2 + t_2) = f(x_2)$

Dakle f je preslikavanje. Da bi bilo homomorfizam mora vrijediti:

$f(x+y) = f(s_x + t_x + s_y + t_y) = f((s_x + s_y) + (t_x + t_y)) = (g(s_x) + h(t_x)) +$
$+ (g(s_y) + h(t_y)) = f(s_x + t_x) + f(s_y + t_y) = f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = f(\alpha(s_x + t_x)) = f(\alpha s_x + \alpha t_x) = g(\alpha s_x) + h(\alpha t_x) =$
$= \alpha(g(s_x)) + \alpha(h(t_x)) = \alpha(f(x))$ $\forall x,y \in V$ $\alpha \in \mathbb{R}$

f je homomorfizam.

$f|_S = g$

Treba samo da još zaključimo da je f restrikcija sa S u g tj.

1 tvrđenje a) je komplementirano

b) $V = \bigoplus_{i\in I} S_i$ $\quad f \in hom(V, V')$, $f|_{S_i} = g_i$ $(i\in I)$

Pretp. da je $V = \bigoplus_{i\in I} S_i$ i neka su g_i homomorfizmi $S_i \to V'$ $(i \in I)$

Definišemo $f: V \to V'$ gdje je $f(x) = f(\sum_{i\in I} s_i) = \sum_{i\in I} g_i(s_i)$

Ako je $x_1 = x_2$, to je $\sum_{i\in I} s_i^1 = \sum_{i\in I} s_i^2$ gdje su s_i^1 i $s_i^2 \in$ ____

$s_i^1 = s_i^2 \quad \forall i \in I$

$g_i(s_i^1) = g_i(s_i^2) \quad \forall i \in I$ tj.

$f(x_1) = \sum_{i\in I} g_i(s_i^1) = \sum_{i\in I} g_i(s_i^2) = f(x_2)$

f - dobro definisano. Pokažimo da je f homomorfizam.

$f(x_1 + x_2) = f(\sum_{i\in I}(s_i^1 + s_i^2)) = \sum_{i\in I} g_i(s_i^1 + s_i^2) =$

$= \sum_{i\in I} g_i(s_i^1) + \sum_{i\in I} g_i(s_i^2) = f(x_1) + f(x_2)$

(pretp. da su g_i $\forall i \in I$ homomorfizmi)

$f(\alpha x) = f(\alpha \sum_{i\in I} s_i) = f(\sum_{i\in I} \alpha s_i) = \sum_{i\in I} g_i(\alpha s_i) =$

$= \alpha \sum_{i\in I} g_i(s_i) = \alpha f(x)$

$f \in hom(V, V') \quad f|_{S_i} = g_i \quad \forall i \in I$

$\bar{f}$ je na-slikovna $s_i = g_i$ $\bar{f}|_{S_i} = g_i$, tada:

mora biti $\bar{f}(x) = \bar{f}(\sum_{i\in I} s_i) = \sum_{i\in I} \bar{f}(s_i) = \sum_{i\in I} g_i(s_i) = f(x)$

$\forall x \in V \quad \bar{f}(x) = f(x)$ tj. $\bar{f} = f$

pa postoji tačno jedan homomorfizam sa ovom osobinom

c) slijedi iz a) i b)

27.11.'03.

$X = \mathrm{End}(V)$

*) Neka je X skup endomorf. u prost. V i $X' = \mathrm{End}(V')$ a $f: V \to V'$ izomorfizam R-modula, a $\hat{f}(g) = f g f^{-1}$ gdje je $g \in \mathrm{End}(V)$. Dokazati da je $\hat{f}$ izomorf. algebre X na algebru X'

Rj.: $\hat{f}: X \to X'$

osobine algebre: $\hat{f}(g_1+g_2) = \hat{f}(g_1) + \hat{f}(g_2)$

$\hat{f}(\alpha g_1) = \alpha \hat{f}(g_1)$

$\hat{f}(g_1 g_2) = \hat{f}(g_1)\hat{f}(g_2)$

$\hat{f}$ - 1-1

$\hat{f}$ - na

1)

$\hat{f}(g_1+g_2)(x) = f(g_1+g_2)f^{-1}(x) = (f(g_1+g_2))(f^{-1}(x)) = f(g_1(f^{-1}(x)) + g_2(f^{-1}(x))) =$

$= fg_1f^{-1}(x) + fg_2f^{-1}(x) = (fg_1f^{-1} + fg_2f^{-1})(x) = (\hat{f}(g_1) + \hat{f}(g_2))(x) \quad (\forall x)$

$\hat{f}(g_1) + \hat{f}(g_2) = \hat{f}(g_1+g_2)$

2).

$\hat{f}(\alpha g_1)(x) = f(\alpha g_1)f^{-1}(x) = f(\alpha g_1(f^{-1}(x))) = \alpha f(g_1)f^{-1}(x)) = (\alpha \hat{f}(g_1))(x)$

3) $\hat{f}(g_1 g_2)(x) = (f(g_1 g_2)f^{-1})(x) = (f(g_1(f^{-1}f)g_2)f^{-1})(x) = ((fg_1f^{-1})(fg_2f^{-1}))(x) =$

$= (\hat{f}(g_1)\hat{f}(g_2))(x)$

4)

$\hat{f}(g_1) = \hat{f}(g_2)$

$fg_1f^{-1} = fg_2f^{-1}$

$g_1 = g_2$ injektivno

5)

$h \in X'$

$f^{-1}hf$

$\hat{f}(f^{-1}hf) = f(f^{-1}hf)f^{-1} = \underline{\underline{h}}$ surjektivno

Zaključak: $\hat{f}$ je izomorf. algebre

*) Neka je Y podalgebra a Z ideal algebre X. Dokazati da je $Y+Z$ podalgebra algebre X a $Y\cap Z$ ideal podalgebre Y i da vrijedi : $(Y+Z)/_Z \cong Y/_{Y\cap Z}$

Rj:

$Y+Z \neq \emptyset$

Y, Z - moduli $\Rightarrow 0 \in Y \wedge 0 \in Z$

$0+0 \in Y+Z$

$a, b \in Y+Z$

$a = y_1 + z_1 \qquad y_1, y_2 \in Y$

$b = y_2 + z_2 \qquad z_1, z_2 \in Z$

$\alpha \in R$

$a-b = y_1+z_1-(y_2+z_2) = \underset{\in Y}{(y_1-y_2)} + \underset{\in Z}{(z_1-z_2)} \in Y+Z$

$\alpha a = \alpha(y_1+z_1) = \underset{\in Y}{\alpha y_1} + \underset{\in Z}{\alpha z_1} \in Y+Z$

Z - podalg. alg. X

ideal : $\forall x \in X \; \forall z \in Z,\; zx, xz \in$

$a \cdot b = (y_1+z_1)(y_2+z_2) = \underset{\in Y}{y_1 y_2} + \underbrace{\underset{\in Z}{y_1 z_2} + \underset{\in Z}{z_1 y_2} + \underset{\in Z}{z_1 z_2}}_{\in Z} \in Y+Z$

$\Rightarrow$ $Y+Z$ je podalg. alg. X

Y, Z - podmoduli $\Rightarrow Y\cap Z$ - podmodul

$a, b \in Y\cap Z$

$a \in Y \wedge a \in Z$

$b \in Y \wedge b \in Z$

$ab \in Y,\; ab \in Z$

$ab \in Y\cap Z$

$a \in Y\cap Z \Rightarrow a \in Z$

$y \in Y$

$\left.\begin{array}{ll} ay \in Z & ay \in Y \\ ya \in Z & ya \in Y \end{array}\right\}\; ay,\, ya \in Y\cap Z$

pa je $Y\cap Z$ ideal podalg. Y

$Y/_{Y\cap Z}$ je dobro def.

$Y\cap Z \in Y/_{Y\cap Z} \qquad 1 \in Y$

Def. - pres. $f: Y+Z \to Y/_{Y\cap Z}$

$f(y+z) = y + Y\cap Z$

surjekt: očigledno!!! (ha!)

$y+0 \to y+(Y\cap Z)$

$f((y_1+z_1)+(y_2+z_2)) = f((y_1+y_2)+(z_1+z_2)) = (y_1+y_2)+Y\cap Z = y_1+Y\cap Z + y_2+Y\cap Z =$

$= f(y_1+z_1) + f(y_2+z_2)$

$f(\alpha(y_1+z_1)) = f(\alpha y_1 + \alpha z_1) = (\alpha y_1)+Y\cap Z = \alpha(y_1+Y\cap Z) = \alpha f(y_1+z_1)$

$f((y_1+z_1)(y_2+z_2)) = f(\underset{\in Y}{y_1 y_2} + \underbrace{y_1 z_2 + z_1 y_2 + z_1 z_2}_{\in Z}) = y_1 y_2 + Y\cap Z = y_1+Y\cap Z \cdot y_2+Y\cap Z =$

$= f(y_1+z_1)\cdot f(y_2+z_2)$

$\ker(f) = ?$

$\ker(f) = \{x \in Y+Z \mid f(x) = 0\cdot(Y\cap Z)\}$

$x \in \ker(f)$

$f(\cancel{y_1+z_1}) = \bar{0} = 0 + Y\cap Z$

$f(\overset{y_1+z_1}{\cancel{x}}) = y_1 + Y\cap Z$

$0 + Y\cap Z = y_1 + Y\cap Z \Rightarrow y_1 \in Y\cap Z$

$y_1 \in Y \wedge y_1 \in Z$

$x = y_1 + z_1 \in Z$

$\ker(f) \in Z$

$x \in Z$

$f(x) = f(0+z) = 0 + Y\cap Z \Rightarrow x \in \ker(f)$

$\underline{\underline{\ker(f) = Z}}$

$$Y+Z/_{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f)$$

$$\mathrm{Im}(f) = Y/_{Y\cap Z}$$

$$\boxed{Y+Z/_Z \cong Y/_{Y\cap Z}}$$

ALGEBRA MATRICA

*) Neka je K skup svih matrica $\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K$ pri čemu su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $E, I, J, K \in M_2(\mathbb{C})$. Dokazati da je K algebra nad poljem realnih b. Ovu algebru zovemo algebra ~~kvaternioni~~ kvaterniona.

Rj.: Skup K je podprostor od $M_2(\mathbb{C})$ jer $K \neq \emptyset$, $O \in K$ i $O = 0 \cdot E + 0 \cdot I + 0 \cdot J + 0 \cdot K$

Ako su A i $B \in K$ onda $A = \alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K$

$B = \alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K$.

$$A - B = \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\in \mathbb{R}} E + \underbrace{(\beta_1 - \beta_2)}_{\in \mathbb{R}} I + \underbrace{(\gamma_1 - \gamma_2)}_{\in \mathbb{R}} J + \underbrace{(\delta_1 - \delta_2)}_{\in \mathbb{R}} K$$

$A - B \in K$

$$\alpha A = \underbrace{(\alpha_1 \alpha)}_{\in \mathbb{R}} E + \underbrace{(\alpha \beta_1)}_{\in \mathbb{R}} I + \underbrace{(\alpha \gamma_1)}_{\in \mathbb{R}} J + \underbrace{(\alpha \delta_1)}_{\in \mathbb{R}} K \in K$$

$\cdot$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	-E	K	-J
J	J	-K	-E	I
K	K	J	-I	-E

$$I \cdot I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$I \cdot J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = K$$

$$I \cdot K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -J$$

$$J \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -K$$

$$J \cdot J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$J \cdot K = I$$

$A, B \in K$

~~$A \cdot B = \alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K$~~

$$A \cdot B = (\alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K)(\alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K) =$$

$$= \alpha_1\alpha_2 E + \alpha_1 \beta_2 I + \alpha_1 \gamma_2 J + \alpha_1 \delta_2 K + \beta_1 \alpha_2 I - \beta_1\beta_2 E + \beta_1 \gamma_2 K - \beta_1 \delta_2 J +$$

$$+\gamma_1\alpha_2 J - \gamma_1\beta_2 K - \gamma_1\gamma_2 E + \gamma_1\delta_2 I + \delta_1\alpha_2 K + \delta_1\beta_2 J - \delta_1\gamma_2 I - \delta_1\delta_2 E =$$

$$= \underbrace{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)}_{\in R} E + \underbrace{(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \gamma_1\delta_2 \ \ldots}_{\in R} \ \ldots \text{ itd}$$

pa je $A \cdot B \in K$

Množenje matrica je asocijativno i distributivno prema sabiranju.
Prema skalarima se ponaša: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ što znači da je K algebra nad poljem R.

*) Neka je A matrica homomorf. $\mathcal{A} \in Hom(V, V')$ u odnosu na bazu $\{e_1 \ldots e_n\}$ slobodnog modula V i bazu $\{e_1', \ldots, e_m'\}$ slobodnog modula V'.

Neka je dalje $S = [e_1, \ldots, e_q]$ i $T = [e_{q+1}, \ldots e_n]$
$S' = [e_1', \ldots, e_p']$ i $T' = [e_{p+1}', \ldots, e_m']$ (prostori generisani ovim v.)

Dalje $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_S \in Hom(S, V')$
$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_T \in Hom(T, V')$

a) Ako je $\mathcal{A}_1(s) \in S'$ gdje je $s \in S$ tada se $\mathcal{A}_1$ može shvatiti kao element skupa $Hom(S, S')$. U tom slučaju je matrica A pridružena ovom skupu hom.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline & A_{22} \end{array}\right]$$

A_{11} – matrica homomorf. $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}$

$\left[\dfrac{A_{12}}{A_{22}}\right]$ – $A_2 \in Hom(T, V')$

b) Ukoliko je još $\mathcal{A}(t) \in T'$ $\forall t \in T$ tada je i $A_{12} = 0$ pa je
$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & \\ \hline & A_{22} \end{array}\right]$$ pri čemu je A_{22} matrica hom. $\mathcal{A}_2 \in Hom(T, T')$

Rj:

a) Pretp. da je $\mathcal{A}_1(s) \in S'$ $\forall s \in S$

A $\{e_1, \ldots, e_n\} \in V$
$\{e_1', \ldots, e_m'\} \in V'$

$\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j e_j'$$

$$\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^{\,j} e_j' + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha_i^{\,j} e_j'$$

$\alpha_j^i = 0$ ako je $i = 1, \dots, q$ i $j = p+1, \dots, m$

$$A_{11} \quad\quad A_{12}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_q^1 \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_q^2 \dots & \alpha_n^2 \\ \hline \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1^p & \dots & \dots & \alpha_q^p \dots & \alpha_n^p \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1^m & \dots & \dots & \alpha_q^m \dots & \alpha_n^m \end{array}\right]$$

$$A_{21} \quad\quad A_{22}$$

$A_{21} = 0$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

$\mathcal{A}_2 \in Hom(T, V')$

$$\mathcal{A}_2(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^{\,j} e_j$$

$i = q+1, \dots, n$

$$\left[\begin{array}{c} A_{12} \\ \hline A_{22} \end{array}\right]$$

b) Na isti način zaključimo slj:

$\mathcal{A}_2(t) \in T'$

$\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} e_i^{\,j} e_j'$ tako da su $i = q+1, \dots, n$

$\alpha_i^{\,j} = 0$ ako je $i = q+1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, p$.

pa je $A_{12} = 0$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

*) Odrediti A^n ako je $n \in N$ i $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj:

$$A^n = \begin{bmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{bmatrix}$$ a, b, c, d - funkc. koje zavise od n

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a(n)+b(n) & 2a(n)+3b(n) \\ 4c(n)+d(n) & 2c(n)+3d(n) \end{bmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} a(n+1) & b(n+1) \\ c(n+1) & d(n+1) \end{bmatrix}$$

$b(n) = a(n+1) - 4a(n)$

$$\left.\begin{aligned} a(n+1) &= 4a(n)+b(n) \\ b(n+1) &= 2a(n)+3b(n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$c(n+1) = 4c(n)+d(n)$

$d(n+1) = 2c(n)+3d(n)$

$a(n+2) = 4a(n+1)+b(n+1) =$

$= 4a(n+1) + 2a(n)+3b(n) =$

$= 4a(n+1) + 2a(n) + 3a(n+1) - 12a(n) =$

$= 7a(n+1) - 10a(n)$

$a(n+2) = 7a(n+1) - 10a(n)$

$a(n+2) - 7a(n+1) + 10a(n) = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$(\lambda-5)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 5$

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$a(n) = \alpha 2^n + \beta 5^n$

$a(1) = 4$

$a(2) = 18$

$a(1) = 2\alpha + 5\beta = 4$

$a(2) = 4\alpha + 25\beta = 18$

$\alpha = 1/3$

$\beta = 2/3$

$$a(n) = \frac{2^n}{3} + \frac{2 \cdot 5^n}{3}$$

$$b(n) = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2\cdot 5^{n+1}}{3} - \frac{4\cdot 2^n}{3} - \frac{8\cdot 5^n}{3} = \frac{-2\cdot 2^n}{3} + \frac{2\cdot 5^n}{3}$$

$$c(n) = \bar{\alpha} 2^n + \bar{\beta} 5^n$$

$c(1) = 1$
$c(2) = 7$

$2\bar{\alpha} + 5\bar{\beta} = 1$
$4\bar{\alpha} + 25\bar{\beta} = 7$

$\bar{\alpha} = -1/3$
$\bar{\beta} = 1/3$

$$c(n) = -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3}$$

$$d(n) = \frac{-2\cdot 2^n}{3} + \frac{5\cdot 5^n}{3} + \frac{4\cdot 2^n}{3} - \frac{4\cdot 5^n}{3} = $$

$$= \frac{2\cdot 2^n}{3} + \frac{5^n}{3}$$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^n + 2\cdot 5^n & -2\cdot 2^n + 2\cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2\cdot 2^n + 5^n \end{bmatrix} \quad n \in N$$

*) Neka je K polje a $A \in K^{n\times n}$ matrica. Dokazati da vrijedi $AB = BA$ $\forall B \in K^{n\times n}$ akko je A skalarna matrica

$\lambda \in K$
$A = \lambda E$

Rj:

V - vekt. pr. dimenzije n nad poljem K. Fiksirajmo jednu bazu tog prostora $\{e_1, \dots, e_n\}$

$\mathcal{A} : V \to V$

$AB = BA \iff \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \quad \forall \mathcal{B} \in End(V)$

$\forall x \in V \ \exists \lambda_x \in K$ tako da je $\mathcal{A}(x) = \lambda_x x$

za $x = 0$ $\quad \mathcal{A}(0) = 0$

$x \neq 0$

x i $\mathcal{A}(x)$ - ako su lin. zavisni onda $\exists \lambda_x$ tako da je $\mathcal{A}(x) = \lambda_x x$

Pretp. da su x i $\mathcal{A}(x)$ lin. nez. v.

$\{x, \mathcal{A}(x), f_3, \dots, f_n\}$ nova baza prostora V.

Posmatrajmo $\mathcal{B} \in End(V)$ def. na novoj bazi tako da je:

$\mathcal{B}(x) = 0$ i

$\mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = 2x$

$\mathcal{B}(f_i) =$ proizvoljno

$\mathcal{B}(x) = 0$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(0) = 0$

$\mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = 2x \neq 0$

$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ - nemoguće

Što znači da su x i $\mathcal{A}(x)$ lin. zavisni vektori.

pa za

$\forall x \in V \quad \exists \lambda_x \in K \quad (\mathcal{A}(x) = \lambda_x x)$

Uzmimo $x, y \in V$ i pretp. da su x i y lin. zavisni.

$x = \alpha y \quad \alpha \in K$

$\mathcal{A}(x) = \lambda_x x$

$\mathcal{A}(y) = \lambda_y y$

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha y) = \alpha \mathcal{A}(y) = (\alpha \lambda_y) y = \lambda_y (\alpha y) = \lambda_y x$

$\lambda_x x = \lambda_y x \quad \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y$

Ako su sada x i y lin. nez.

$\mathcal{A}(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$

$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$

$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y$

$\underbrace{(\lambda_{x+y} - \lambda_x)}_{=0} x + \underbrace{(\lambda_{x+y} - \lambda_y)}_{=0} y = 0$

zbog lin. nez. pa je $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ i $\lambda_{x+y} = \lambda_y$

tj $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

Pa $\exists \lambda \in K$ $\mathcal{A}(x) = \lambda x$ i $\mathcal{A} = \lambda \mathcal{E}$

odnosno $A = \lambda E$

q. e. d.

1.12.03.

Linearni operatori

Jezgro i slika linearnih operatora

Def: Neka je $f: V \to V'$ lin. preslikavanje. Slika i jezgro preslikavanja f definisani redom sa: $Im(f) = \{v' \in V' \mid v' = f(v)$ za neko $v \in V\}$

$Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_{V'}\}$

*) Neka je $f: R^4 \to R^3$ lin. preslikavanje def. sa $f(x,y,s,t) = \{x-y+s+t, x+2s-t, x+y+3s-3t\}$

Naći bazu i dimenziju slike i jezgra preslikavanja f.

Rj:

Odredimo bazu od $Im(f)$: Neka je $e_1(1,0,0,0)$, $e_2(0,1,0,0)$, $e_3(0,0,1,0)$, $e_4(0,0,0,1)$ kanonska baza u R^4. $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \in Im(f)$.

Uzmimo $y \in Im(f)$. Tada $\exists x \in R^4$: $f(x) = y$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$.

$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) + x_4 f(e_4)$

Dakle prostor $Im(f)$ generisan je vektorima $f(e_i)$, $i = \overline{1,4}$

$f(e_1) = (1,1,1) = b_1$ $\qquad$ $f(e_3) = (1,2,3) = b_3$

$f(e_2) = (-1,0,1) = b_2$ $\qquad$ $f(e_4) = (1,-1,-3) = b_4$

$a_1 = (1,1,1) = b_1$

$b_2' = b_2 + a_1 = (-1,0,1) + (1,1,1) = (0,1,2)$

$b_3' = b_3 - a_1 = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2)$

$b_4' = b_4 - a_1 = (1,-1,-3) - (1,1,1) = (0,-2,-4)$

$a_2 = b_2' = (0,1,2)$

$b_3'' = (0,0,0)$

$b_4'' = (0,0,0)$

$\{a_1, a_2\}$ baza od $Im(f)$ $\Rightarrow$ $\dim(Im(f)) = 2$

Nađimo sada bazu i dim. od $Ker(f)$

$v \in \mathbb{R}^4$, $f(v) = 0$, $v = (x, y, s, t)$

$f(x,y,s,t) = (x - y + s + t,\ x + 2s - t,\ x + y + 3s - 3t) = (0, 0, 0)$

$x - y + s + t = 0 \Rightarrow x = y - s - t$

$x + 2s - t = 0 \quad y - s - t + 2s - t = y + s - 2t = 0$

$x + y + 3s - 3t = 0 \quad y - s - t + y + 3s - 3t = 2y + 2s - 4t = 0$

$$\left.\begin{cases} y + s - 2t = 0 \\ y + s - 2t = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y = 2t - s$$

$x = 2t - s - s - t = t - 2s$

$(x, y, s, t) = (t - 2s, 2t - s, s, t)$ $\quad s, t$ - proizvoljno

$s = 1, \ t = 0, \quad v_1 = (-2, -1, 1, 0)$ $\quad [v_1, v_2]$ - baza od $Ker(f)$

$s = 0, \ t = 1, \quad v_2 = (1, 2, 0, 1)$

$\dim V = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = 2 + 2 = 4$

*) Naći lin. preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ čija je slika generisana vektorima $(1, 2, 0, 4), (2, 0, -1, -3)$. Neka je $y \in Im(f)$. Tada je $y = \alpha(1, 2, 0, 4) + \beta(2, 0, -1, -3)$

$e_1(1, 0, 0) \quad e_2(0, 1, 0) \quad e_3(0, 0, 1)$

$f(e_1) = (1, 2, 0, -4) \quad f(e_2) = (2, 0, -1, -3) \quad f(e_3) = (0, 0, 0, 0)$

$Im(f) = [(1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3)]$

$f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1, 2, 0, -4) + y(2, 0, -1, 3) +$
$+ z(0, 0, 0, 0) = (x + 2y, 2x - y, -4x - 3y)$

$f(x, y, z) = (x + 2y, 2x - y, -4x - 3y)$

*) Naći lin. preslikavanje $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ čije je jezgro generisano vektorima $(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)$. Naći $f(x, y, s, t)$

$Ker(f) = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = (0, 0, 0) \}$

$(x, y, s, t) = \alpha(1, 2, 3, 4) + \beta(0, 1, 1, 1)$

$x = \alpha, \quad y = 2\alpha + \beta, \quad s = 3\alpha + \beta$

$t = 4\alpha + \beta$

$a_1(1, 2, 3, 4) \qquad a_3(0, 0, 1, 0)$
$a_2(0, 1, 1, 1) \qquad a_4(0, 0, 0, 1)$
$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$

$\alpha_1 = 0$ $\quad 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ $\quad 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ $\quad 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$

$\alpha_2 = 0$ $\quad \alpha_3 = 0$ $\quad \alpha_4 = 0$

$f(a_1) = (0,0,0)$ $\quad f(a_3) = (1,0,0)$

$f(a_2) = (0,0,0)$ $\quad f(a_4) = (0,1,0)$

$f(x,y,s,t) = f(xa_1 + (y-2x)a_2 + (s-y-x)a_3 + (-y+t-2x)a_4) =$

$= (s-y-x)(1,0,0) + (t-y-2x)(0,1,0) = (s-y-x,\ t-y-2x,\ 0)$

*) Neka je V vekt. prostor, 2x2 matrica nad poljem realnih brojeva R i neka je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Neka je $f: V \to V$ lin. preslikavanje def. sa $f(A) = AM - MA$.

Naći dim. i bazu prostora $Ker(f)$

$\dim(M_2(R)) = 4$

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}$

$f(A) = \begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x+3y \\ s & 2s+3t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x+2s & y+2t \\ 3s & 3t \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2s & 2x+2y-2t \\ -2s & 2s \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} s & t-x-y \\ s & -s \end{bmatrix}$

$f(A) = -2\begin{bmatrix} s & t-x-y \\ s & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$s = 0$ $\quad t - x - y = 0$

$s = 0$ $\quad t = x + y$ $\quad x, y$ proizv.

$\dim(Ker(f)) = 2$

$x = 1 \quad y = 0 \quad s = 0 \quad t = 1$ $\qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x = 0 \quad y = 1 \quad s = 0 \quad t = 1$ $\qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Ker(f) = [A_1, A_2]$

*) Odrediti sve $\lambda \in R$ za koje je sa $(\alpha, \beta) \to (\alpha + \lambda x + \beta x^2)$. Def. lin. preslikavanje f i vekt. prostora R^2 u prostor svih polinoma $R[x]$.

$e_1 = (1,0)$ $\quad e_2 = (0,1)$

$f(e_1) \quad f(e_2)$ baza prostora $R[x]$

$f(1,0) = (1+\lambda x)$ $\quad f(0,1) = (\lambda x + x^2)$

$\alpha(1+\lambda x) + \beta(\lambda x + x^2) = 0$

$\alpha + \alpha\lambda x + \beta\lambda x + \beta x^2 = 0$

$\alpha = 0, \beta = 0$

$\alpha\lambda + \beta\lambda = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$l((\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)) = l(\alpha_1,\beta_1)+l(\alpha_2,\beta_2)$

$l(\alpha(\alpha_1,\beta_1)) = \alpha l(\alpha_1,\beta_1)$

$l((\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)) = \alpha_1+\alpha_2+\lambda x+(\beta_1+\beta_2)x^2 = l(\alpha_1,\beta_1)+l(\alpha_2,\beta_2) =$

$\alpha_1+\lambda x+\beta_1 x^2+\alpha_2+\lambda x+\beta_2 x^2 = \alpha_1+\alpha_2+2\lambda x+(\beta_1+\beta_2)x^2$

$\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$l(\alpha,\beta) = \alpha+\beta x^2$

$l(\alpha(\alpha_1,\beta_1)) = l(\alpha\alpha_1,\alpha\beta_1) = \alpha\alpha_1+\alpha\beta_1 x^2 = \alpha(\alpha_1+\beta_1 x^2) = \alpha l(\alpha_1,\beta_1)$

*)

Neka su $f: R^3 \to R^2$, $g: R^3 \to R^2$, $h: R^3 \to R^2$ lin. preslikavanja def.

sa $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y)$

$g(x,y,z) = (2x+z, x+y)$

$h(x,y,z) = (2y, x)$

Pokazati da su f,g,h homomorfizmi sa R^3 na R^2 lin. nez.

$af+bg+ch=0 \Leftarrow (a,b,c\in R)$

$(\forall(x,y,z)\quad af(x,y,z)+bg(x,y,z)+ch(x,y,z) = (0,0)$

$a(x+y+z, x+y)+b(2x+z,x+y)+c(2y,x) = (0,0))$

$(*)\quad (\forall x\in R^3)\ af(x)+bg(x)+ch(x) = 0(x) = 0$

$e_1(1,0,0)\quad e_2(0,1,0)\quad e_3(0,0,1)$

$af(e_1)+bg(e_1)+ch(e_1) = 0(e_1)$

$a(1,1)+b(2,1)+c(0,1) = (0,0)$

$a+2b=0 \quad \wedge \quad a+b+c=0$

$af(e_2)+bg(e_2)+ch(e_2) = 0(e_2)$

$a(1,1)+b(0,1)+c(2,0) = (0,0)$

$a+2c=0 \quad \wedge \quad a+b=0$

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=0 \\ a+b+c=0 \\ a+2c=0 \\ a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-b \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}$$

$af(e_3)+bg(e_3)+ch(e_3) = 0(e_3)$

$a(1,0)+b(1,0)+c(0,0) = (0,0)$

$a+b=0$

Dakle (*) važi akko $a=b=c=0$. Dakle f,g,h su lin. nez.

*) Neka je $A: V \to V$ lin. op. na konačno dim. vekt. prostoru V i neka je $B = -A + E$ gdje je E jedinični operator prostora V. Ako je $A^2 = A$, dokazati da važi:

a) $Im(A) = Ker(B)$

b) $Im(B) = Ker(A)$

c) $Im(A) \oplus Ker(A) = V$

Rj:

a) $x \in Im(A) \Rightarrow (\exists y \in V)\ A(y) = x$. Zbog $A^2 = A$ je $A^2(y) = A(x) = A(y)$ tj. $A(x) = x$ pa je $-A(x) + x = 0$, a to znači $B(x) = (-A+E)(x) = -A(x) + x = 0$ tj. $x \in Ker(B)$.

Dakle, $Im(A) \subseteq Ker(B)$.

$x \in Ker(B) \Rightarrow B(x) = 0 \Rightarrow (-A+E)(x) = 0 \Rightarrow -A(x) + x = 0 \Rightarrow A(x) = x \Rightarrow x \in Im(A)$

Dakle $Ker(B) \subseteq Im(A)$

Dakle $Im(A) = Ker(B)$.

b)

$x \in Im(B) \Rightarrow (\exists y \in B)\ B(y) = x \Rightarrow (-A+E)(y) = x \Rightarrow -A(y) + y = x$

$A^2 = A$ $\quad A(-A(y) + y) = A(x)$

$(-A^2(y) + A(y)) = A(x)$

$= -A(y) + A(y) = A(x) \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(A)$

Dakle $Im(B) \subseteq Ker(A)$

$x \in Ker(A) \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow B = -A + E \Rightarrow B(x) = -A(x) + x = x \Rightarrow x \in Im(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker(A) \subseteq Im(B) \Rightarrow Ker(A) = Im(B)$

c)

$x \in Im(A) \cap Ker(A) \Rightarrow x \in Im(A) \wedge x \in Ker(A) \Rightarrow (\exists y \in V)\ A(y) = x \wedge A(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2(y) = A(x) = 0 \Rightarrow A(y) = 0 \wedge A^2(y) = A(y) = x \Rightarrow x = 0$

$Im(A) \cap Ker(A) = \{0\}$

Uzmimo bilo koji vektor iz V. $x = A(x) + x - A(x) \Rightarrow A(x) \in Im(A)$

$A(x - A(x)) = A(x) - A^2(x) = A(x) - A(x) = 0 \Rightarrow x - A(x) \in Ker(A)$

Dakle $Im(A) \oplus Ker(A) = V$

*) Dokazati da je preslikavanje h na prostoru $M_2(R)$ def. sa $h(A)=\frac{1}{2}(A+A^T)$ endomorfizam tog prostora i naći jezgro i sliku preslikavanja h.

Rj: $\alpha,\beta\in R \qquad A,B\in M_2$

$$h(\alpha A+\beta B)=\frac{1}{2}\left[\alpha A+\beta B+(\alpha A+\beta B)^T\right]=\frac{1}{2}\left[\alpha A+\beta B+\alpha A^T+\beta B^T\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\alpha(A+A^T)+\beta(B+B^T)\right]=\alpha\cdot\frac{1}{2}(A+A^T)+\beta\cdot\frac{1}{2}(B+B^T)=\alpha h(A)+\beta h(B)$$

Odredimo sliku $Im(h)$:

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\quad E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$h(E_1)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$h(E_2)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$h(E_3)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$h(E_4)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$h(E_2)=h(E_3) \qquad Im(h)=[h(E_1),h(E_2),h(E_4)]$

Očigledno su matrice $h(E_1)$, $h(E_2)$ i $h(E_4)$ lin. nezavisne, pa čine bazu prostora $Im(h)$. Dakle $\dim(Im(h))=3$.

$\dim(Im(h))+\dim(Ker(h))=\dim(V)$

$3+\dim(Ker(h))=4$

$\Rightarrow \dim(Ker(h))=1$

$h(A)=0 \qquad A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}(A+A^T)=0$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}a=0\\d=0\\b=-c\end{array}$$

$A=\begin{bmatrix}0&b\\-b&0\end{bmatrix}$, specijalno za $b=1$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ i to je baza prostora $Ker(h)$

*) Ako je $e=[e_1,e_2,e_3]$ fiksna baza vekt. prostora R^3, ispitati da li postoji lin. preslikavanje $l: R^3\rightarrow R[x]$ za koje je $l(e_1)=2+x+x^2$, $l(e_2)=3-x$

Rj:

$l(e_1+2e_2+e_3)=0$

$l(e_1+2e_2+e_3)=l(e_1)+2l(e_2)+l(e_3)=2+x+x^2+2(3-x)+l(e_3)$

$l(e_3)=-2-x-x^2-6+2x=-x^2+x-8$

$x \in \mathbb{R}^3$ $\quad x=(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

$l(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=l(\alpha x+\beta y)=l(\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3))=$

$=l(\alpha x_1+\beta y_1,\ \alpha x_2+\beta y_2,\ \alpha x_3+\beta y_3)=l((\alpha x_1+\beta y_1)e_1+(\alpha x_2+\beta y_2)e_2+$

$+(\alpha x_3+\beta y_3)e_3)=(\alpha x_1+\beta y_1)l(e_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)l(e_2)+(\alpha x_3+\beta y_3)l(e_3)$

l je lin. preslikavanje jer smo ga tako def. i jednoznačno određuje bazu za $R[x]$.

*) Dokazati da za lin. presl. $l: V\to V$ važi $Im(l^2)=Im(l)$ akko je $V=Ker(l)+Im(l)$

($\Leftarrow$)

$V=Ker(l)+Im(l)$

$x\in Im(l^2) \Rightarrow (\exists v\in V)\ l^2(v)=x \Rightarrow l(l(v))=x \Rightarrow x\in Im(l) \Rightarrow$

$\Rightarrow Im(l^2)\subseteq Im(l)$

$x\in Im(l) \Rightarrow (\exists y\in V)\ l(y)=x$

l $x=k+i$ $\quad (k\in Ker(l),\ i\in Im(l))$ $\quad l(y)=l(k)+l(i)=?)$

$y=v+u$ $\quad v\in Ker(l)$ $\quad u\in Im(l) \Rightarrow \exists z\in V$ $\quad u=l(z)$

$l(y)=l(v)+l^2(z)=x \Rightarrow l^2(z)=x$ $\quad x\in Im(l^2)$

$Im(l)\subseteq Im(l^2)$

$\Rightarrow Im(l)=Im(l^2)$

($\Rightarrow$) $Im(l^2)=Im(l)$

$x\in V$ $\quad x=x-l(y)+l(y)$

$x\in V$, a $x\in(Im(l))=Im(l^2))$ a to znači da $\exists y\in V$ za koje je

$l(x)=l^2(y)$. Za tako dobiveno y $\quad x=\underbrace{x-l(y)}_{\in Ker(l)}+\underbrace{l(y)}_{\in Im(l)}$

pa se $\forall x$ može napisati kao suma jednog elementa iz $Im(l)$

pa je $V=Ker(l)+Im(l)$.

11.12.2003.

Rang lin. preslikavanja

Rang matrice

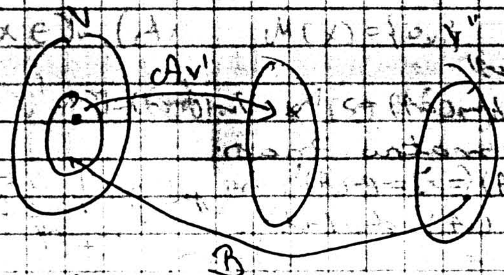
Def: Neka je $\mathcal{A}$ homomorfizam sa V u V'. Podprostor od V' oznaka $Im(\mathcal{A})$ zove se slika, a podprostor V od $Ker(\mathcal{A})$ zove se jezgra od $\mathcal{A}$.

U slučaju vekt. prostora dimenzije slike zove se rang, a dimenzija jezgra defekt lin. preslikavanja $\mathcal{A}$. Znači: $\text{rang}\, \mathcal{A} = \dim(Im(\mathcal{A}))$
$\text{def}\, \mathcal{A} = \dim(Ker(\mathcal{A}))$. Dalje vrijedi: $\dim(V) = \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{def}(\mathcal{A})$

ISPIT

*) Neka su V, V' i V'' vekt. prostori nad istim poljem. $\mathcal{A} \in Hom(V, V')$, $\mathcal{B} \in Hom(V'', V)$. Dokazati da je $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \min\{\text{rang}\,\mathcal{A}, \text{rang}\,\mathcal{B}\}$ te da je $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \text{rang}\,\mathcal{A}$ odnosno $\text{rang}\,\mathcal{B}$ ukoliko je preslikavanje $\mathcal{B}$, odnosno $\mathcal{A}$ bijektivno.

Rj:



$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in Hom(V'', V')$

$\text{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = \dim(Im(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})) =$
$= \dim(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(V'')) = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V''))) \leq$

$\mathcal{B}(V'') \subseteq V$ $\qquad \leq \dim(\mathcal{A}(V)) = \dim(Im(\mathcal{A})) = \text{rang}(\mathcal{A})$

$\text{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = \dim(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(V'')) = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V''))) \leq \dim(\mathcal{B}(V'')) = \dim(Im(\mathcal{B})) = \text{rang}\,\mathcal{B}$

$\dim \mathcal{B}(V'') = \text{rang}(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V''))) + \text{def}(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V'')))$

$\dim(V'') \geq \dim(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V'')))$

Dakle $\text{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \leq \min\{\text{rang}\,\mathcal{A}, \text{rang}\,\mathcal{B}\}$

Dalje pretp. da je $\mathcal{B}$ bijekcija ($\mathcal{B}$ je surjekcija)

$\mathcal{B}(V'') = V$

$\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \dim(Im(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})) = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V''))) = \dim(\mathcal{A}(V)) = \dim(Im(\mathcal{A})) = \text{rang}\,\mathcal{A}$

Pretp. sada da je $\mathcal{A}$ bijekcija. Ako je $\mathcal{A}$ bijekcija, $\mathcal{A}_1 \in Hom(V, V')$

$\text{rang}\,\mathcal{A}_1 = \dim(Im(\mathcal{A}_1)) = \dim(V')$

$\dim(V) = \text{rang}(\mathcal{A}) + \overset{=0}{\text{def}(\mathcal{A})} = \text{rang}(\mathcal{A}) = \dim(V')$

znači da je rang $\mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{A}^{-1})) = \dim(\mathcal{A}^{-1}(V)) = \dim(V) = \operatorname{rang}\mathcal{B} = \dim(\operatorname{Im}(id \circ \mathcal{B})) =$

$= \dim((\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}) \circ \mathcal{B}) = \dim(\mathcal{A}^{-1} \circ (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})) \leq \min\{\operatorname{rang}\mathcal{A}, \operatorname{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\}$

$\operatorname{rang}\mathcal{B} \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \leq \operatorname{rang}\mathcal{B}$

$\operatorname{rang}\mathcal{B} = \operatorname{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$

ISPIT

*) Neka su V i V' vekt. prostori nad istim poljem K, a $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V, V')$. Dokazati da je $\operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \leq \operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{rang}\mathcal{B}$ ako su $\operatorname{rang}\mathcal{A}$ i $\operatorname{rang}\mathcal{B}$ konačni znači da vrijedi i $|\operatorname{rang}\mathcal{A} - \operatorname{rang}\mathcal{B}| \leq \operatorname{rang}(A + B)$

Rj:

$\operatorname{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq \operatorname{Im}(\mathcal{A} + \operatorname{Im}(\mathcal{B}))$

Ako je $x \in \operatorname{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ znači da $\exists y \in V$ tako da je $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(y) = x$

$x = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(y) = \mathcal{A}(y) + \mathcal{B}(y) \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}) + \operatorname{Im}(\mathcal{B})$

$\operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{A} + \mathcal{B})) \leq \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{A})) + \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{B})) = \operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{rang}\mathcal{B}$

Pretp.: $\operatorname{rang}\mathcal{A}, \operatorname{rang}\mathcal{B} \rightarrow$ konačni

$\operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang}(-\mathcal{A})$ i $\operatorname{rang}\mathcal{B} = \operatorname{rang}(-\mathcal{B})$ zato što je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{A}))$

$\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in V' \mid \exists x \in V \quad \mathcal{A}(x) = y\}$

Ako $x \in \underbrace{\operatorname{Im}(\mathcal{A})}_{\text{vekt. pr.}}$ onda i vektor $-x \in \operatorname{Im}(\mathcal{A})$

$\exists y \in V \quad \mathcal{A}(y) = x$ ako $x \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}) \Rightarrow x \in \operatorname{Im}(-\mathcal{A})$

i obratno znači

$\mathcal{A}(-y) = -\mathcal{A}(y) = -x$ $\qquad \operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \operatorname{Im}(-\mathcal{A})$

$\dim(\mathcal{A}) = \dim(-\mathcal{A})$ pa je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(-A)$

$\dim\mathcal{A} = \operatorname{rang}((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + (-\mathcal{B})) \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \operatorname{rang}(-\mathcal{B}) = \operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{rang}\mathcal{B} =$

$= \operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad (*)$

Iz tog razloga je $\operatorname{rang}(\mathcal{B}) = \operatorname{rang}(-\mathcal{A} + (\mathcal{A} + \mathcal{B})) \leq \operatorname{rang}(-\mathcal{A}) + \operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$

$\operatorname{rang}\mathcal{B} - \operatorname{rang}\mathcal{A} \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad (**)$

Odavde i iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow |\operatorname{rang}\mathcal{A} - \operatorname{rang}\mathcal{B}| \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$

ISPIT

*) Neka su V i V' vekt. prostori pozitivne dim. nad istim poljem R. Dokazati da je $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, V')$ izomorfizam prostora V na prostor V' akko relacije:

$(\exists \mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V', V))$ tako da je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} = id_V$ (1)

$(\exists \mathcal{C} \in \operatorname{Hom}(V', V))$ tako da je $\mathcal{A} \circ \mathcal{C} = id_{V'}$ (2). Dokazati to i ...

akko (1) ili (2) vrijedi za točno jedno $\mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V', V)$ - dokazati da ...

$\mathcal{C} \in \operatorname{Hom}(V, V')$

Dj: Pretp. da je $\mathcal{A}$ bijekcija. To znači da $\exists \mathcal{A}^{-1}$ tako da je $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1} = id_{V'}$, $\mathcal{A}^{-1}\circ\mathcal{A} = id_V$

$V' = \mathcal{A}(V')$ [illegible]

$\mathcal{B} \in Hom(V', V)$ $\quad \mathcal{B}\circ\mathcal{A} = id_V$ [illegible]

$\mathcal{B} = \mathcal{B}$, [illegible] $\mathcal{B}\circ(\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1}) = (\mathcal{B}\circ\mathcal{A})\circ\mathcal{A}^{-1} = id_V\circ\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$

$\mathcal{B}$ - jedinstveno

Pretp. da $C \in Hom(V, V')$ $\quad \mathcal{A}\circ C = id_{V'}$

$C = id_V\circ C = (\mathcal{A}^{-1}\circ\mathcal{A})\circ C = \mathcal{A}^{-1}\circ(\mathcal{A}\circ C) = \mathcal{A}^{-1}\circ id_{V'} = \mathcal{A}^{-1}$

C - jedinstveno

Obrnuto: pretp. da $\exists$ tačno jedno $\mathcal{B} \in Hom(V', V)$ tako da je $\mathcal{B}\circ\mathcal{A} = id_V$.

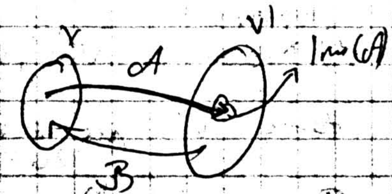
Pokažimo da je $\mathcal{A}$ homotetija (injektivno i sirj.)

Pretp. $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\bar{x})$ znači $\quad \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(\bar{x})$

$\mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\bar{x}))$

$id(x) = id(\bar{x})$

$x = \bar{x}$



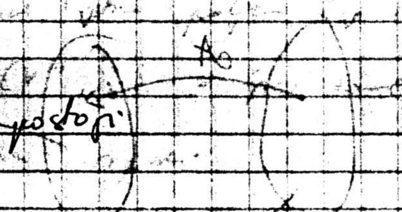
Preslikavanje $\mathcal{A}$ je injektivno.

Pretp. da $\mathcal{A}$ nije sirj. To znači da je $Im(\mathcal{A}) \neq V'$ tj. $V' / Im(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

$\mathcal{M} \in Hom(V', V)$ takav da je $\mathcal{M}(Im(\mathcal{A})) = \{0_V\}$

$\forall x \in Im(\mathcal{A})$ $\quad \mathcal{M}(x) = \{0_V\}$

$x \in V' \setminus Im(\mathcal{A})$ $\quad \mathcal{M}(x) \neq \{0_V\}$ $\rightarrow$ ovo sigurno postoji



$\mathcal{M} \neq 0$ (nula preslikavanje)

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} + \mathcal{M} \in Hom(V', V)$ i za njega vrijedi

$\mathcal{B}'\circ\mathcal{A} = (\mathcal{B}\circ\mathcal{M})\circ\mathcal{A} = \underbrace{(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})}_{id_V} + \underbrace{(\mathcal{M}\circ\mathcal{A})}_{id_V} = id_V$. Ipak je $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$

Postoji jedan veći iz $\mathcal{B}'$ što je u kontradikc. sa pretp.

Dakle $\mathcal{A}$ je i sirj. tj. bijektivno preslikavanje.

Pretp. $\exists!\ C \in Hom(V', V)$. $\quad \mathcal{A}\circ C = id_{V'}$

$x \in V'$ $\quad x = id_{V'} = \mathcal{A}\circ C(x) = \mathcal{A}(C(x))$

$\forall x \in V'$ $\quad \exists y \in V$ tako da je $\mathcal{A}(y) = x$ $\quad\quad y = C(x)$

znači $\mathcal{A}$ je sirjekcija

Pretp. da $\mathcal{A}$ nije injektivno. $\exists$ bar dva vekt. $x, \bar{x}$ i $x \neq \bar{x}$ i

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\bar{x})$. To znači $\mathcal{A}(x - \bar{x}) = \{0_V\}$, $x - \bar{x} \in Ker(\mathcal{A})$

Pošto je $x \neq \bar{x}$ znači da je $Ker(\mathcal{A}) \neq \{0_V\}$

$Ker(\mathcal{A})$ potprostor prostora V.

Posmatrajmo $\ker(\mathcal{A})$ i V. $\exists$ hom $\mathcal{N} \in \mathrm{Hom}(V', \ker(\mathcal{A}))$ takav da $\mathcal{N} \neq 0$ (nula preslikavanje). Zbog $\ker(\mathcal{A}) \neq \{0_V\}$.

Sada $\mathcal{N} \in \mathrm{Hom}(V', V)$ možemo posmatrati (smatrati) tako da je $\mathrm{Im}(\mathcal{N}) = \ker \mathcal{A}$.

Označimo sa $\mathcal{C}' = \mathcal{C} + \mathcal{N} \in \mathrm{Hom}(V', V)$

Imamo $\mathcal{A} \circ \mathcal{C}' = \mathcal{A} \circ (\mathcal{C} + \mathcal{N}) = \underbrace{\mathcal{A} \circ \mathcal{C}}_{id_{V'}} + \underbrace{\mathcal{A} \circ \mathcal{N}}_{0} = id_{V'}$

$\exists \mathcal{C}' \neq \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \circ \mathcal{C} = id_{V'}$ što je u kontr. s pretp.

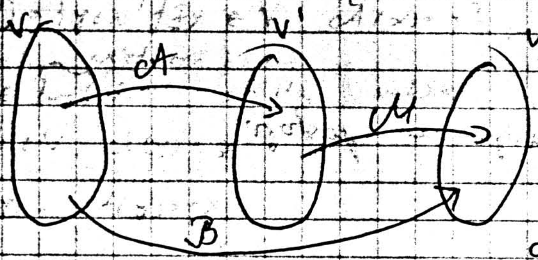
Dakle, $\mathcal{A}$ je injekcija.

Iz svega rečenog zaključujemo da je $\mathcal{A}$ izomorfizam.

ISPITNI

*) Neka su V, V', V'' vekt. prostori nad istim poljem K i neka se prostor V'' ne sastoji samo od $\{0_V\}$. Dokazati da za zadano $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $\mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V'')$ postoji bar jedan (tačno jedan) $\mathcal{M} \in \mathrm{Hom}(V', V'')$ za koji vrijedi $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$ akko vrijedi $\ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{B})$ (i osim toga $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = V'$)

Rj:



Pretp. da $\exists \mathcal{M}$: $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$

pokažimo da $\ker \mathcal{A} \subseteq \ker \mathcal{B}$.

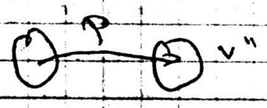
~~Pretp~~ $x \in \ker(\mathcal{A})$. To znači da je

$\mathcal{A}(x) = \{0_V\}$. $\mathcal{M}(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{B}(x) = \{0_V\} = \{0_{V''}\}$

To znači $\mathcal{B}(x) = 0_{V''} \Rightarrow x \in \ker(\mathcal{B})$. što je $\ker \mathcal{A} \subset \ker \mathcal{B}$

Pretp. da $\exists$ tačno jedno $\mathcal{M}$ sa osobinom $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$. Moramo pokazati da je $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = V$. $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \neq V'$ $V'' \neq \{0_V\}$. Skup $V' / \mathrm{Im}(\mathcal{A})$ V'

znači da postoje bar dva homomorfizma $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^*$ za koje je $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$ i $\mathcal{M}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$.



$V' / \mathrm{Im}(\mathcal{A})$ Dakle mora biti $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = V'$.

Pretp. $\ker(\mathcal{A}) \subseteq \ker(\mathcal{B})$

... je $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$ ... V ...

$\mathcal{M}(x) = \mathcal{B}(x)$ za ono x za koje je $x = \mathcal{A}(x)$. $\mathcal{M}(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{B}(x)$

$\exists \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V', V)$ ... $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$ ...

$\exists \mathcal{C} \in \mathrm{Hom}(V, V')$ ... $\mathcal{A} \circ \mathcal{C} = id_{V'}$

Pokažimo da je $\mathcal{M}$ dobro def. Pretpost. da ... Posmatrajmo ...

sa ... u $\ker(\bar{x})$

$\mathrm{Im}\,\mathcal{B}(x)$ $= \mathcal{B}(\bar{x})$ gdje je $\bar{x}$ ... $\mathcal{A}(x) = ...$

Znači da je $\mathcal{A}(x') = \mathcal{A}(\bar{x}')$ [illegible]

$\mathcal{A}(x') - \mathcal{A}(\bar{x}') = 0_{V'}$. To je $\mathcal{A}(x' - \bar{x}') = 0$ [illegible] $x' - \bar{x}' \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ [illegible]

$\operatorname{Ker} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{B}$ što znači da [illegible] $\mathcal{B}(x' - \bar{x}') = 0$ [illegible] $\mathcal{B}(x') = \mathcal{B}(\bar{x}')$

To je $\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(x')$ [illegible]

Pokažimo da je $\mathcal{M}$ homomorfizam [illegible] $(*)$

$\mathcal{M}(x+y) = \mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(x'+y')$ $(*)$

(z – za koje je $\mathcal{A}(z) = x+y$) $\mathcal{A}(x'+y') = x+y$

$\mathcal{A}(x') + \mathcal{A}(y') = x+y$

$(x') = \mathcal{B}(x') + \mathcal{B}(y') = \mathcal{M}(x) + \mathcal{M}(y)$

$\mathcal{M}(\alpha x) = \mathcal{B}(\alpha x') = \alpha \mathcal{B}(x') = \alpha \mathcal{M}(x)$ za ono x' za koje je $\mathcal{A}(x') = x$

pa je tada i $\alpha \mathcal{A}(x') = \mathcal{A}(\alpha x') = \alpha x$

Dakle $\mathcal{M}$ je homomorf. za koji vrijedi $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}$

Ako je $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = V'$ onda se $\mathcal{M}$ za koje vrijedi $*)$ između ostalog

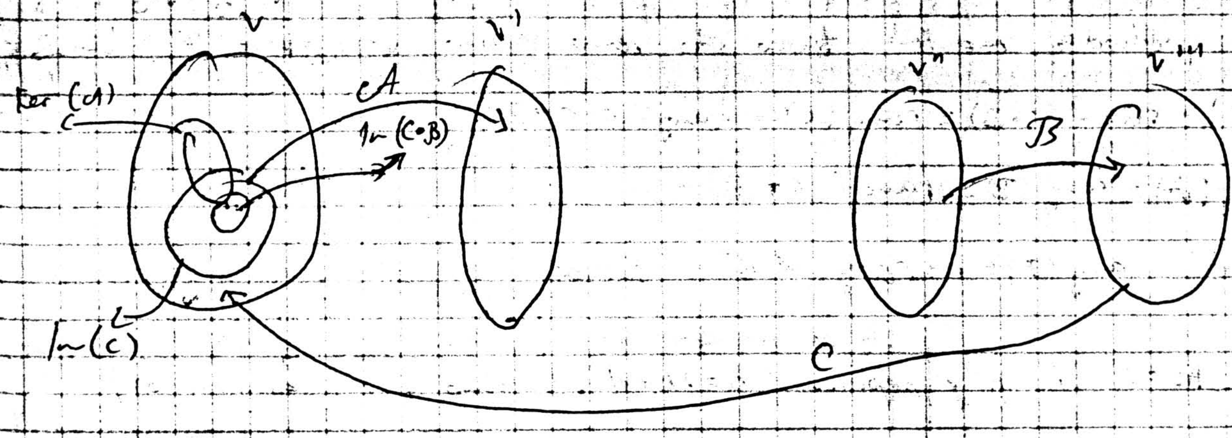
def. jednoznačno, u suprotnom $\mathcal{M}$ nije jednoznačno def.

VERŠAN

*) Neka su V, V', V'' i V''' vekt. prostori nad istim poljem K. Ako je $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $\mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V'', V''')$, $\mathcal{C} \in \operatorname{Hom}(V''', V)$ i ako je

$\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{B}))$ konačna, to Dokažati da vrijedi:

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{C}) + \operatorname{rang}(\mathcal{C} \circ \mathcal{B}) \le \operatorname{rang}(\mathcal{C}) + \operatorname{rang}(\mathcal{A} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{B})$$



$\operatorname{Im}(\mathcal{C} \circ \mathcal{B}) = \mathcal{C} \circ \mathcal{B}(V'') \subseteq \mathcal{C}(V''')$

$\operatorname{Im}(\mathcal{C} \circ \mathcal{B}) \subseteq \operatorname{Im}(\mathcal{C})$, to je $(**)$ $\overbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{C} \circ \mathcal{B})}^{S_1} \subseteq \overbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{C})}^{S}$

$S_1 \subseteq S \Rightarrow \dim S_1 \le \dim S$ $\qquad \dim V = \operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A}$

$(*)$ $\operatorname{rang} \mathcal{C} = \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{C})) = \operatorname{rang}(\mathcal{A} / \operatorname{Im}(\mathcal{C})) + \operatorname{def}(\mathcal{A} / \operatorname{Im}(\mathcal{C})) =$

$= \dim(\operatorname{Im}(\mathcal{A} \setminus \operatorname{Im}(\mathcal{C})) + \dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{A} / \operatorname{Im}(\mathcal{C})) =$ ~~[illegible]~~

$= \dim(\mathrm{Im}(A \circ C)) + \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(C)) = \mathrm{rang}(A \circ C) + \dim S.$

(**) $\mathrm{rang}(C \circ B) = \dim(\mathrm{Im}(C \circ B)) = \mathrm{rang}(A|_{\mathrm{Im}(C \circ B)}) =$

$= \dim(\mathrm{Im}\, A|_{\mathrm{Im}(C \circ B)}) + \dim(\mathrm{Ker}\, A|_{\mathrm{Im}(C \circ B)}) =$

$= \dim(\mathrm{Im}(A \circ C \circ B)) + \dim(\mathrm{Ker} A \cap \mathrm{Im}(C \circ B)) = \mathrm{rang}(A \circ C \circ B) + \dim S_1$

Iz (*) $\Rightarrow \dim S = \mathrm{rang}\, C - \mathrm{rang}(A \circ C)$

Iz (**) $\Rightarrow \dim S = \mathrm{rang}(C \circ B) - \mathrm{rang}(A \circ C \circ B)$ $\Big\} \Rightarrow$

Iz $(^*_*)$ $\Rightarrow \mathrm{rang}(C \circ B) - \mathrm{rang}(A \circ C \circ B) \leq \mathrm{rang}\, C - \mathrm{rang}(A \circ C) \Rightarrow \mathrm{rang}(C \circ B) + \mathrm{rang}(A \circ C) \leq$

$\leq \mathrm{rang}\, C + \mathrm{rang}(A \circ C \circ B)$

*)

Neka je $\mathbb{K}$ polje a A i B matrice formata $n \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$.

Dokazati da vrijedi: a) $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq \mathrm{rang}(AB) + n$

b) ako je n neparno $(n = 2k+1)$ i $AB = 0$, dokazati da je bar jedna od matrica $A + A^T$ i $B + B^T$ singularna.

Rj:

a) Uzmimo V vekt. prostor takav da je $\dim(V) = n$. Neka je $e_1, \ldots, e_n$ proizvoljna baza vekt. prostora. Matricama A i B možemo pridružiti lin. operator $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takav da je $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, pa $C = id_V$.

Sigurno vrijedi $\mathrm{rang}(\mathcal{A}) = \mathrm{rang}(A)$, $\mathrm{rang}\, \mathcal{B} = \mathrm{rang}\, B$, $\mathrm{rang}\, C = \mathrm{rang}\, E = n$.

Primijenimo prethodni zadatak tako što ćemo staviti $V = V' = V'' = V'''$. Imamo

$\mathrm{rang}(A \circ C) + \mathrm{rang}(C \circ B) \leq \mathrm{rang}(C) + \mathrm{rang}(A \circ C \circ B)$

$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq \mathrm{rang}(A \cdot B) + n$

$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n + \mathrm{rang}(A \cdot B)$ q.e.d.

b) Pretp. $AB = 0$ i n je neparan $(n = 2k+1)$. Imamo: (na osnovu a))

$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n$

Imamo $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$ i $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(B^T)$ [illegible]

pa dobijemo $\mathrm{rang}(A^T) + \mathrm{rang}(B^T) \leq n$ [illegible]

$\mathrm{rang}(A^T) + \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) + \mathrm{rang}(B^T) \leq 2n$ [illegible]

Već dokazano $\mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}\, A + \mathrm{rang}\, B$ [illegible]

$\text{rang}(A) + \text{rang}(A^T) \geq \text{rang}(A + A^T)$

$\text{rang}(B + B^T) \leq \text{rang}\, B + \text{rang}\, B^T$

$\text{rang}\, A < \frac{n}{2}$ ili $\text{rang}\, B < \frac{n}{2}$

To važi i za trans.: $\text{rang}\, A^T < \frac{n}{2}$ ili $\text{rang}\, B^T < \frac{n}{2}$. Ako je $\text{rang}\, A < \frac{n}{2}$

onda je $\text{rang}(A + A^T) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. To znači da je $A + A^T$ singularna

matrica. Ako ovo ne važi, onda je $B + B^T$ singularna

q.e.d.

EKVIVALENTNOST MATRICE

ERMITOVA KANONSKA FORMA

Def: Za matricu $A \in R^{m \times n}$ kaže se da je nad prstenom R ekvivalentna sa matricom $B \in R^{m \times n}$ ako postoji invertibilna matrica $P \in R^{n \times n}$, $Q \in R^{m \times m}$ za koje vrijedi $B = Q^{-1} A P$

1) Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dokazati da je matrica B ekvivalentna sa matricom A nad poljem realnih brojeva R i odrediti invertibilne matrice $S = Q^{-1}$ i P za koje vrijedi $B = SAP$.

Rj:

Za ovo treba Ermitova kanonska forma

$$A\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]E_3 \underset{\sim}{\mathrm{I}_v + \mathrm{III}_v} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \end{array}\right] Q^{-1}$$

E_3 $\qquad$ P_1

Imamo da je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1} A P$.

To znači da je ova matrica ekvivalentna sa A.

Imamo za B:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{\sim}{\mathrm{II} - \mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{\sim}{\mathrm{II} \cdot 2 + \mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{\sim}{\mathrm{I}_k \cdot (-1) + \mathrm{II}_k} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{\sim}{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array}\right]$$

Q_2 $\qquad$ P_2

Dobili smo da je $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_2^{-1} B P_2$. Imamo: $Q_2 \,|\, Q_1^{-1} A P_1 = Q_2^{-1} B P_2 \,|\, P_2^{-1}$

$= Q_2 Q_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = B$

$(Q_1 Q_2^{-1})^{-1} \cdot A \cdot (P_1 P_2^{-1}) = B$

Označimo sa $P = P_1 P_2^{-1}$, a $S = (Q_1 Q_2^{-1})^{-1}$. Imamo $SAP = B$. Ostaje još da odredimo matrice S i P. Za $S = (Q_1 Q_2^{-1})^{-1}$ imamo

inverzna Q_{12}^{-1}
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dakle $S = Q_2 \cdot Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

*) Riješiti matričnu jednačinu $Ax = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rj.:

$E = Q^{-1} A P \qquad Q E P^{-1} x = B$

$A = Q P^{-1} \qquad E P^{-1} x = Q^{-1} B$

$x = P Q^{-1} B$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 0 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -6 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -2 & & \\ 0 & 1 & -1 & -2 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] Q^{-1}B$$

Matrica A je formata (3×4) $(m \times n) = 3 \times 2$, a rezultat je 3×2, $m = 4$ i $n = 2$ (4×2)

~~$x = PQ^{-1}B$~~

$x = P Q^{-1} B$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 - 2\lambda_3 & -\lambda_2 - \lambda_4 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 & 1 - \lambda_2 - 2\lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i λ_4 su proizvoljni i realni.

*) Riješiti matričnu jednačinu [illegible]

$A_1 X = B_1$

$B = Q^{-1} A_1 P$

$A = Q E P^{-1}$

$Q E P^{-1} X = B_1$

$E P^{-1} X = Q^{-1} B_1$

$E = Q^{-1} A P_1 \Rightarrow A = Q P_1^{-1}$

$Y Q_1 E P^{-1} = B$

$Y Q_1 E = B P_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ 2 & 3 & 1 & & \\ 3 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ 2 & 3 & 1 & & \\ 3 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 2 & -1 & -5 & & \\ 3 & -1 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 2 & 1 & 0 & & \\ 3 & 1 & -3 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right] Q_1^{-1}$$

$m \times n$

$2 \times 3 = 4 \times 3$

$m = 4, \ n = 2$

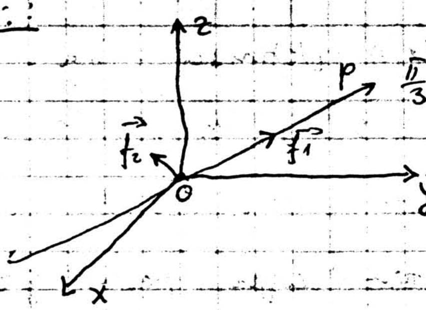
$Y^{4 \times 2}$

$Y Q_1 E = B P_1$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*) Neka je $\mathcal{A}$ rotacija prostora za ugao $\varphi = \frac{\pi}{3}$ oko ose p koja prolazi tačkom O i određena je vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Odrediti matricu A lin. transformacije $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koji čine jedinični međusobno ortogonalni vektori za koje je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desni triedar.

Rj.:



Uzmimo $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{f_1} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$.

Tražimo $\vec{f_2} \perp \vec{f_1}$

$\vec{f_2} \cdot \vec{f_1} = 0$ tj. $(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 0$

Ako je $\vec{f_2} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\quad 2x + 2y + z = 0$. Ako uzmemo da je $x = 1, \ z = 2, \ y = -2$.

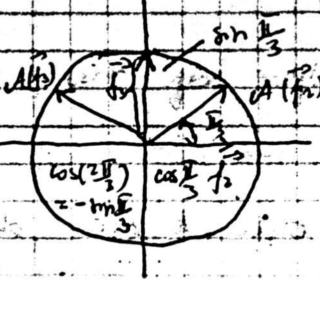
$$\vec{f_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$$
$$2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$\vec{f_2} = \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$

$\vec{f_3} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$

Baza je $\{f_1, f_2, f_3\}$. Označimo matricu u ovoj bazi sa A_f. Imamo

$\mathcal{A}(f_1) = f_1$



Olakšavajuće je da su vektori na jediničnoj kružnici $\mathcal{A}(f_2) = \cos\frac{\pi}{3} f_2 + \sin\frac{\pi}{3} f_3$

$\mathcal{A}(f_3) = -\sin\frac{\pi}{3} f_2 + \cos\frac{\pi}{3} f_3$

Matrica transformacije je $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad p = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \end{array}\right] \sim$$

Konačni rezultat je $p = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$A = P\bar{A}P^{-1}$ pa je A u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

*) Neka su X, Y, Z vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ sa bazama $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{f_1, f_2\}$ i $\{g_1, g_2\}$ redom.

Neka linearna preslikavanja $A \in Hom(X,Y)$ i $B \in Hom(Z,Y)$ imaju u odnosu na date baze matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

i) Pokazati da je B izomorfizam i naći matricu preslikavanja B^{-1} u odnosu na date baze

ii) Naći matricu kanonskog homomorfizma $\Pi: X \to X / Ker(B^{-1} \circ A)$

iii) Naći matricu preslikavanja $\Phi: Hom(X,Y) \to Hom(X,Z)$ definisanu sa $\Phi(\varphi) = B^{-1} \circ \varphi \quad \forall \varphi \in Hom(X,Y)$.

Rj:

i) Pokažimo najprije da je B izomorfizam. U tom cilju nađimo jezgro preslikavanja.

Imamo: $Ker(B) = \{x \in Z : B(x) = 0\}$ $\qquad x = x_1 g_1 + x_2 g_2$

$B(x) = B(x_1 g_1 + x_2 g_2) = x_1 B(g_1) + x_2 B(g_2) = x_1(f_1 + 3f_2) + x_2(2f_1 + 4f_2) =$

$= (x_1 + 2x_2) f_1 + (3x_1 + 4x_2) f_2 = 0$

f_1, f_2 - baza, pa mora biti jednako nuli

$x_1 + 2x_2 = 0$

$3x_1 + 4x_2 = 0$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

Sistem ima samo trivijalno rješenje: $x_1 = x_2 = 0$, a to znači da je $x \in Z$, $x = 0$

tj. $Ker(B) = \{0_Z\}$ a ovo znači da je B injektivno preslikavanje.

$def\,B = 0$ $\quad \dim Z = rang\,B + def\,B$

$2 = rang\,B$

$\dim(Im(B)) = 2$ $\quad Im(B) \le Y$

$Im(B) = Y$

Znači da je B i surjektivno preslikavanje. Ovo znači da je B izomorfizam pa je preslikavanje B^{-1}. Ono odgovara matrici B^{-1}

Imamo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det B = -2$ $\quad$ tj. $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

ii) $B^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1/2 & 1/2 & 7/2 \end{bmatrix}$ matrica preslikavanja tj.

$B \circ A \in Hom(X, Z)$

$Ker(B^{-1} \circ A) = \{x \in X : (B^{-1} \circ A)(x) = 0\}$ tj. $B^{-1} \circ A \cdot x = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1/2 & 1/2 & 7/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1 = x_2 + 7x_3 = -\frac{10}{3}x_3 + 7x_3 = \frac{11}{3}x_3$

$2x_2 + 14x_3 + x_2 - 4x_3 = 0$

$3x_2 + 10x_3 = 0$

$3x_2 = -10x_3 \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{3}x_3$

Ovo znači da je $Ker(B^{-1} \circ A) = \{\frac{11}{3}\alpha e_1 - \frac{10}{3}\alpha e_2 + \alpha e_3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$

ako uzmemo $\alpha = 3$ imamo $\{11e_1 - 10e_2 + 3e_3\}$ tj. $\dim(Ker(B^{-1} \circ A)) = 1$

Imamo $X / Ker(B^{-1} \circ A)$

$x + Ker(B^{-1} \circ A)$, $(x \in X)$

Uzmimo $11e_1 - 10e_2 + 3e_3$. Trebamo ga dopuniti do baze X. Imamo: $(11e_1 - 10e_2 + 3e_3, e_1, e_2)$

Oni su lin. nezavisni pa čine bazu prostora X. To znači da će nam bazu prostora $X / Ker(B^{-1} \circ A)$ činiti $\left.\begin{matrix} e_1 + Ker(B^{-1} \circ A) \\ e_2 + Ker(B^{-1} \circ A) \end{matrix}\right\}$ baza prostora $X / Ker(B^{-1} \circ A)$

Baza prostora $X / Ker A$ jer najlakše znači da nađemo s bazu prostora $Ker A$ pa je nadopunimo tj. vektori su linearno nezavisni i čine bazu prostora $X / Ker A$.

$X / Ker(B^{-1} \circ A)$, $\pi(x) = x + Ker(B^{-1} \circ A)$

$\Pi(e_1) = e_1 + \ker(B^{-1} \circ A)$

$\Pi(e_2) = e_2 + \ker(B^{-1} \circ A)$

$\Pi(e_3) = e_3 + \ker(B^{-1} \circ A)$

$= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ker(B^{-1} \circ A)$ $(\alpha_1, \alpha_2$ treba odrediti$)$

Imamo: $e_3 + \ker(B^{-1} \circ A) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ker(B^{-1} \circ A)$

$e_3 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 \subset \ker(B^{-1} \circ A)$

Znači postoji skalar β tako da je

$e_3 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 = \beta(11e_1 - 10e_2 + 3e_3)$

$(11\beta + \alpha_1)e_1 + (-10\beta + \alpha_2)e_2 + (3\beta - 1)e_3 = 0$

e_1, e_2, e_3 su lin. nezavisni pa je ovo moguće ako je

$\begin{cases} 11\beta + \alpha_2 = 0 \\ 3\beta - 1 = 0 \end{cases}$ $\alpha_1 = -11\beta$ $\alpha_1 = \frac{11}{3}$

$\beta = 1/3$ $-10\beta + \alpha_2$ $\alpha_2 = 10/3$

$\Pi(e_3) = -\frac{11}{3}(e_1 + \ker(B^{-1} \circ A)) + 10/3\,(e_2 + \ker(B^{-1} \circ A))$

Ako sa M označimo matricu kanonskog homomorfizma

$\{e_1 + \ker(B^{-1} \circ A), e_2 + \ker(B^{-1} \circ A)\}$

Imamo $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 10/3 \end{bmatrix}$

iii)

$Hom(X, Y)$ $m_{ij}(e_j) = f_i$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

$Hom(X, Z)$ $n_{ij}(e_j) = g_i$ $i = 1,2$ $j = 1,2,3$

Tražena matrica je 6×6 jer su sl. iz prostora 6 u 6. Zanimaju nas vektori $F(m_{11}(e_1)) = (B^{-1} \circ m_{11})(e_1) = B^{-1}(m_{11}(e_1)) = B^{-1}(f_1) =$

$= -2g_1 + 3/2\, g_2 = -2\, n_{11}(e_1) + 3/2\, n_{21}(e_1) = (-2 n_{11} + 3/2\, n_{21})(e_1)$

Ako sa F označimo traženu matricu imamo

$$F = \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$F(m_{12}(e_2)) = (B^{-1} \circ m_{12})(e_2) = B^{-1}(f_1) = -2g_1 + 3/2\, g_2$ [illegible]

$= -2 n_{12}(e_2) + 3/2\, n_{22}(e_2) = (-2 n_{12} + 3/2\, n_{22})(e_2)$ [illegible]

$\mathcal{F}(r_{13}(e_3)) = B^{-1} \circ r_{13}(e_2) = B^{-1}(f_1) = -2g_1 + 3/2\, f_2 =$

$= -2 r_{13}(e_3) + 3/2\, r_{23}(e_3) = (-2r_{13} + 3/2\, r_{23})(e_3)$

$\mathcal{F}(r_{21}(e_1)) = B^{-1} \circ r_{21}(e_1) = B^{-1}(f_2) = g_1 - 1/2\, g_2 = r_{12}(e_2) - \frac{1}{2} r_{21}(e_1) =$

$= (r_{12} - \frac{1}{2} r_{22})(e_3)$

Nazad ?

15.12.'03.

*) Neka su X i Y vektorski prostori nad poljem R i $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baza u X i $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza u Y. Neka je $A \in Hom(X,Y)$ takav da vrijedi: $A(e_1 - e_2) = f_1 + f_2$; $A(e_2 - e_3) = 2f_2 - 3f_3$; $A(e_3 - e_4) = 2f_1 + f_3$, $A(e_4 + e_1) = f_1 + 3f_2 - f_3$. Neka je π kanonski homomorfizam $\pi : X \to X/Ker(A)$. Naći matricu hom. u odnosu na neku bazu X u neku bazu u $X/Ker(A)$ i naći matricu $Hom(A)$ u odnosu na baze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ u X, $\{f_1, f_2, f_3\}$ u Y.

Rj:

g_1, g_2, g_3, g_4 - čine bazu prost. X.

$g_1 = e_1 - e_2$
$g_2 = e_2 - e_3$
$g_3 = e_3 - e_4$
$g_4 = e_4 + e_1$

$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 = \alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_2 - e_3) + \alpha_3(e_3 - e_4) + \alpha_4(e_4 + e_1) =$

$= (\alpha_1 + \alpha_4)e_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)e_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)e_3 + (\alpha_4 - \alpha_3)e_4 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0$
$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = \alpha_1 \qquad \alpha_2 = 0$
$\alpha_3 = 0$
$\alpha_3 = \alpha_2 \qquad \alpha_4 = 0$
$\alpha_4 = \alpha_3$

Vektori g_1, g_2, g_3, g_4 su lin. nezavisni, a kako je dimenzija prostora $= 4$ ovi vekt. čine bazu prostora X u odnosu na baze $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ i $\{f_1, f_2, f_3\}$.

$Hom(A)$ ima matricu A'

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Odredimo sada jezgro preslikavanja A

$\vec{x} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4$, tako da je:

$A(x) = 0$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&3\\0&-3&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=0$$ tj.

$\alpha_1+2\alpha_3+\alpha_4=0$

$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_4=0$

$-3\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0 \Rightarrow \alpha_4=-3\alpha_2+\alpha_3$

$\alpha_2=0$

$\alpha_4=\alpha_3$

$\alpha_1=-3\alpha_3$

α_3 - proizvoljno

(A)

Spec. $\alpha_3=1$, $-3g_1+g_3+g_4\in Ker(A)$, $Ker(A)=[\{-3g_1+g_3+g_4\}]$

Odredimo jednu od baza X:

$g_1, g_2, g_3, -3g_1+g_3+g_4$ — provjerimo da li su vekt. lin. nez.

$\beta_1 g_1+\beta_2 g_2+\beta_3 g_3+\beta_4(-3g_1+g_3+g_4)=0$

$(\beta_1-3\beta_4)g_1+\beta_2 g_2+(\beta_3+\beta_4)g_3+\beta_4 g_4=0$

$\beta_1=3\beta_4$, $\beta_2=0=\beta_4$; Ovi vekt. su još jedna baza prost. X.

Vektori $g_1+Ker(A)$, $g_2+Ker(A)$, $g_3+Ker(A)$ čine bazu prost. $X/Ker(A)$

Označimo ih sa $\bar g_1, \bar g_2, \bar g_3$; Odredimo matricu kanonskog homomorf. Π koji preslikava prostor X u $X/Ker(A)$.

$\Pi(x)=x+Ker(A)$

$\Pi(g_1)=g_1+Ker(A)=\bar g_1$

$\Pi(g_2)=g_2+Ker(A)=\bar g_2$

$\Pi(g_3)=g_3+Ker(A)=\bar g_3$

$\Pi(g_4)=g_4+Ker(A)=\alpha_1\bar g_1+\alpha_2\bar g_2+\alpha_3\bar g_3$

$g_4+Ker(A)=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3+Ker(A)$

$g_4-\alpha_1 g_1-\alpha_2 g_2-\alpha_3 g_3\in Ker(A)$, tj. $\exists\beta\in R: g_4-\alpha_1 g_1-\alpha_2 g_2-\alpha_3 g_3=\beta(-3g_1+g_3+g_4)$

$(3\beta-\alpha_1)g_1-\alpha_2 g_2+(-\beta-\alpha_3)g_3+(-\beta+1)g_4=0$

$3\beta-\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=3$

$\alpha_2=0$

$\Pi(g_4)=3\bar g_1-\bar g_3$

$-\beta-\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_3=-1$

$-\beta+1=0 \Rightarrow \beta=1$

$$\Pi=\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

[illegible] se dobije Ker(A)

[illegible]

greške u [illegible]

$A(e_1-e_2)=f_1+f_2$ $\quad$ $A(e_1)-A(e_2)=f_1+f_2$

$A(e_2-e_3)=2f_1-f_3$ $\quad$ $A(e_2)-A(e_3)=2f_1-f_3$

$A(e_3-e_4)=2f_1+f_3$ $\quad$ $A(e_3)-2f_1-f_3+A(e_4)=f_1+3f_2-f_3$

$A(e_1+e_4)=f_1+3f_2-f_3$ $\quad$ $A(e_4)=f_1+2f_2-\frac{1}{2}f_3$

$A(e_1)-A(e_2)=f_1+f_2$

$A(e_2)-A(e_3)=2f_1-f_3$

$A(e_3)-A(e_4)=2f_1+f_3 \Rightarrow A(e_4)=A(e_3)-2f_1-f_3$

$A(e_4)+A(e_1)=f_1+3f_2-f_3$

Još jedan način kako da odredimo matricu:

$\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ na bazi $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ tj. trebamo vektore (e_1,e_2,e_3,e_4) dobiti preko vektora g_1,g_2,g_3,g_4

$g_1=e_1-e_2$ $\quad$ $e_2=e_1-g_1$

$g_2=e_2-e_3$ $\quad$ $g_2=e_1-g_1-e_3$ $\quad$ $g_2+g_1=e_1-e_3$

$g_3=e_3-e_4$ $\quad$ $g_3=e_3-e_4$ $\quad$ $e_3=g_3+e_4$

$g_4=e_1+e_4$ $\quad$ $g_4=e_1+e_4$ $\quad$ $g_4=e_1+e_4$

$g_2+g_1-g_4=-e_3-e_4$

$g_3=e_3-e_4$

$2e_3=g_3-g_2-g_1+g_4$

$e_3=\frac{1}{2}(g_1-g_2+g_3+g_4)$

$e_4=\frac{1}{2}(-g_1-g_2-g_3+g_4)$

$e_1=\frac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4)$

$e_2=\frac{1}{2}(-g_1+g_2+g_3+g_4)$

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \qquad A=AP$$

$$A'=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\4&2&0&3\\0&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

*) Neka je V vekt. prostor matrica oblika $\begin{bmatrix}a&b\\c&0\end{bmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ sa prirodnim operacijama sabiranja i množenja matrica skalarom.

a) Dokazati da je V vekt. prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i naći njegovu dimenziju i bar jednu bazu.

b) Neka je $A: V\to\mathbb{R}^3$ preslikavanje dato sa $A\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&0\end{bmatrix}\right)=[b, a+c, 0]$.

Dokazati da je $A\in Hom(V,\mathbb{R}^3)$ i odrediti matricu $Hom(A)$, matricu kanonskog ... $\pi: V\to V/\ker(A)$. Da li je A izomorfizam

Rj:
a) Dokažimo da je V podprostor vekt. prostora matrica dimenzije 2x2 nad $\mathbb{R}$

$V \neq \emptyset$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$ i $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \in V$;

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & b_1+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix} \in V$ $\left.\begin{matrix} a_3 = a_1 + a_2 \\ b_3 = b_1 + b_2 \\ c_3 = c_1 + c_2 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

V - podprostor nad $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Odredimo jednu bazu ovog podprostora. (E_1, E_2, E_3 - lin. nez.)

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pokažimo da ove matrice generišu prostor V, očito je jer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + cE_2 + bE_3$

Dimenzija prostora V=3, pa smo našli i jednu bazu.

Nađimo matricu preslikavanja A u $\{E_1, E_2, E_3\}$ prostora V i u bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.

$A(E_1) = A\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = [0,1,0]$, $A(E_2) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = [0,1,0]$, $A(E_3) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = [1,0,0]$

$A(E_1) = [0,1,0] = 0e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 = A(E_2)$, $A(E_3) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$

Tražena matrica je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Preslikavanje A nije izomorfizam (dva različita vekt. imaju iste slike tj. $E_1 \neq E_2 \Rightarrow A(E_1) = A(E_2)$)

Odredimo Ker(A)

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array}\right]$

Ker(A) generisan vektorom $[E_1 - E_2]$

rang A = 2 ; def A = 1

*) Neka je $\mathbb{R}_2[x]$ polinoma stepena 2 sa realnim koef. i neka je
$A = \{ax^2 + ax + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ podskup tog skupa.
a) dokazati da je ... podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}_2[x]$ nad $\mathbb{R}$ u odnosu na ... A operacije sabiranja polinoma ... V ...

b) Nađi neki komplement B pod prostora A

c) Neka je $\Pi : R_2[x] \to R_2[x]/B$ prirodni endomorfizam. Nađi $\Pi(x^2+x+1)$. Nađi polinom $P(x) \neq x^2+x+1$ takav da je $\Pi(P(x)) = \Pi(x^2+x+1)$

R:

a) Neka je $A \neq \emptyset$, $0 \in A$

Imamo dva polinoma $\left.\begin{array}{l} a_1x^2+a_1x+c_1 \\ a_2x^2+a_2x+c_2 \end{array}\right\}+$ $(a_1+a_2)x^2+(a_1+a_2)x+(c_1+c_2) =$

$= a_3x^2+a_3x+c_3, \in A$

$a_3 = a_1+a_2$

$(\alpha a_1)x^2+(\alpha a_1)x+(\alpha c_1) \in A$

$c_3 = c_1+c_2$

A je vektorski prostor podprostora $R_2(x)$ pa je i sam vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Baza prostora $R_2(x)$ je $\{1, x, x^2\}$ sa vektorima $[1, x+x^2]$ čine baza prost. A (lin. nez.) dim $A = 2$.

Prostor A koji je generisan sa $B=[x]$ tj. $B = \{\alpha x \mid \alpha \in R\}$. Neka je B prostor generisan. Pokažimo da je $B \oplus A = R_2[x]$. Neka nam je $f \in B \cap A$ tj. $f = ax^2+ax+c$ i $f = bx$

odavde je $ax^2+ax+c = bx$ tj. $ax^2+(a-b)x+c = 0$, $a=0$, $a-b=0$, $c=0$

polinom $f=0$. To znači da je $A \cap B = \{0\}$. Pokažimo da se svaki polinom može napisati kao suma elemenata iz A i B

$f = ax^2+bx+c = \alpha$

$= \underbrace{ax^2+ax+c}_{\in A} + \underbrace{(b-a)x}_{\in B}$ $\qquad B \oplus A = R_2[x]$

c) $\Pi(x^2+x+1) = x^2+x+1+B = x^2+1+\underbrace{x+B}_{x \in B} = x^2+1+B$

$x+B = B$

Uzmimo $p(x) = x^2+1$

$p(x) = x^2+300x+1$

$p(x) \neq x^2+x+1$

$\Pi(x^2+300x+1) = x^2+300x+1+B = x^2+1+B = \Pi(x^2+x+1)$

$300x = \alpha x \neq B = B$

*) Neka je V vekt. prostor nad poljem R i $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ njegova baza. Neka lin. preslik. $A \in End(V)$ ima u toj bazi matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Neka je L podprostor prostora V generisan vektorima e_1+2e_2 i $e_2+e_3+2e_4$. Dokažimo da je $\forall x \in L$ i $A(x) \in L$ tj. da je L invarijantan u odnosu na A. Naći matricu preslikavanja A u odnosu na bazu $\{e_2, e_3, e_4, e_1\}$.

Rj:

$f_1 = e_1 + 2e_2$

$f_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$ odredimo čemu je jednako $A(f_1)$

$$A(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f_1$$

$$A(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = f_2$$

Svako $x \in L$ $(L = \{f_1, f_2\})$ se može napisati kao lin. kombinacija f_1, f_2

tj. $L = \{\alpha f_1 + \beta f_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in R\}$

Uzmimo $x \in L$ proizvoljno, $x = \alpha f_1 + \beta f_2$. Čemu je jednako

$A(x) = A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A(f_1) + \beta A(f_2) = \alpha f_1 + \beta f_2 = x \in L$

L je invarijantno u odnosu na A.

$e_1' = e_2$ Tražimo matricu prelaza A u bazi $\{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$

$e_2' = e_3$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$e_3' = e_4$

$e_4' = e_1$

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ako sa A' uvedemo matricu operatora, imamo da je $A' = P^{-1}AP$ (Sam!!!)

*) Neka je V vekt. pr. polinoma u promj. x sa koefic. iz skupa R, brojeva stepena manje ili jednako 3, a $a = 1 + x + x^2$. Dokazati da je sa $L(f) = 2f + f(1)a$ definisano jedno linearno preslikavanje $L: V \to V$ i odrediti njegovu sliku, jezgro, rang i defekt.

Rj:

Pokažimo najprije da je $L(f)$ lin. presl. $V = \{b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \mid b_i \in R, i = \overline{1,4}$

Bazu prostora V na čine $\{1, x, x^2, x^3\}$

$L(f_1+f_2) = 2(f_1+f_2) + (f_1+f_2)(1)\,a = 2f_1 + 2f_2 + (f_1(1)+f_2(1))\,a =$

$= 2f_1 + f_1(1)\,a + 2f_2 + f_2(1)\,a = L(f_1) + L(f_2)$

$L(\alpha f) = 2\alpha f + (\alpha f)(1)\,a = 2\alpha f + \alpha f(1)\,a = \alpha(2f + f(1)a) = \alpha L(f)$.

L - endomorfizam prostora V (lin. preslikavanje nad V)

Odredimo matricu preslikavanja L u odnosu na bazu $\{1, x, x^2, x^3\}$

$L(1) = 2\cdot 1 + 1(1+x+x^2) = x^2+x+3$

$L(x) = 2\cdot x + 1 + x + x^2 = 3x + x^2 + 1$

$L(x^2) = 2x^2 + x^2 + x + 1 = 3x^2 + x + 1$

$L(x^3) = 2x^3 + x^2 + x + 1$

Ako sa L označimo matricu imamo da je
$$L = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to x^0 \\ \to x^1 \\ \to x^2 \\ \to x^3 \end{array}$$

08.01.'04.

Adjungovani ili dualni par prostora

Bilinearna funkcija

Def 1: Neka je V modul nad prostorom R. Modul $Hom(V,R)$ zove se dualni modul modula V i označava se sa V^*. Elementi modula V^* označavaju se sa $x^*, y^*, \dots$ i zovu se lin. funkcije ili lin. funkcionali.

Def 2: Neka su X i Y moduli nad istim prstenom R. Preslikavanje $\varphi: X\times Y \to R$ koji svakom uređenom paru x, y iz $X\times Y$ pridružuje element $\varphi(x,y)\in R$ zove se bilinearna funkc. na $X\times Y$ ako ima slj: osobine:

1) $\varphi(x_1+x_2, y) = \varphi(x_1,y) + \varphi(x_2,y)$

2) $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y) \quad \alpha\in R$

3) $\varphi(x, y_1+y_2) = \varphi(x,y_1) + \varphi(x,y_2)$

4) $\varphi(x,\alpha y) = \alpha\varphi(x,y)$

Ako je poslije toga ispunjen i uslov

5) $\varphi(x,y) = 0\ (x\in X) \Rightarrow y = 0$, odnosno

6) $\varphi(x,y) = 0\ (y\in Y) \Rightarrow x = 0$ kažemo da je bilinearna funkc. φ nedegenerisana u odnosu na Y odnosno u odnosu na X.

Def 3: Neka je φ bilinearna funkc. na $X \times Y$ i $A \subseteq X$ (podskup modula X). Tada se skup $A^{\perp} = \{$ kao skup svih $y \in X : \varphi(x,y) = 0,\ x \in A \}$ zove anihilator skupa A u odnosu na φ. Slično se definiše i anihilator skupa B ako je $B \subseteq Y$.

Def 4: Neka je (X, Y, φ) adjungovan par prostora konačne dimenzije. $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora X i $\{f_1, \dots, f_n\}$ baza prostora Y, ako vrijedi $\varphi(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ onda se za svaku od ovih baza kaže da je dualna onoj drugoj.

*) Neka je V vekt. pr. običnih vektora. Dokazati za $\forall x^* \in V^*$ postoji tačno jedan vektor $a \in V$ takav da vrijedi $x^*(x) = a \cdot x$ $\forall x \in V$; Obrnuto za $\forall a \in V$ preslikavanje $x^* : V \to R$ zadano prethodnom jednačinom, predstavlja linearni funkcional.

Rj:

$x^* \in V^*$

$x^* : V \to R$

$\forall x \in V$ se može napisati na jednoznačan način sa

$x = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$

$x^*(x) = x^*(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) = (a_1 x^*(\vec{i}) + a_2 x^*(\vec{j}) + a_3 x^*(\vec{k}))$

$\vec{a} = x^*(\vec{i})\vec{i} + x^*(\vec{j})\vec{j} + x^*(\vec{k})\vec{k}$

$\forall x \in V \quad x^*(x) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ Ovim smo pokazali egzistenciju.

Sad jedinstvenost:

$\exists b \in V \quad x^*(x) = \vec{b} \cdot \vec{x} \quad (\forall x \in V)$

$\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0 \qquad \forall x \in Y$

$\vec{x} = \vec{a} = \vec{b}$, zato imamo

$\vec{a} - \vec{b} = 0$, to znači da je $\boxed{\vec{a} = \vec{b}}$

$a \in V$

$x^*(x) = \vec{a} \cdot \vec{x}$

$x^* : V \to R$

$x^*(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{a}\cdot\vec{y} = x^*(\vec{x}) + x^*(\vec{y})$

$x^*(\alpha\vec{x}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{x}) = \alpha\cdot\vec{a}\cdot\vec{x} = \alpha x^*(\vec{x})$.

Pošto ovo vrijedi za $\forall x,y\in V$ i $\forall\alpha\in B$, x^* je lin. funkcional nad vekt. pr. V

*) Neka je X, Y, φ adjungovan par vekt. pr. konačne dimenzije $\{e_1,\dots e_n\}$ i $\{e_1',\dots,e_n'\}$ i baze prostora X, a $\{f_1,\dots,f_n\}$ i $\{f_1',\dots,f_n'\}$ njima dualne baze prostora Y. Ako je P matrica prelaza sa baze $\{e_1,\dots,e_n\}$ na bazu $\{e_1',\dots,e_n'\}$. Dokazati da je $(P^T)^{-1}$ matrica prelaza sa baze $\{f_1,\dots,f_n\} \xrightarrow{(P^T)^{-1}} \{f_1',\dots,f_n'\}$.

Rj:

$\varphi(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ Neka je P matrica prelaza $P=(p^i_j)$

$\varphi(e_i',f_j') = \delta_{ij}$

$e_i' = \sum_{j=1}^n p_i^j e_j$ $Q(f) = (f')$

$f_k' = \sum_{l=1}^n q_k^l f_l$

$$\delta_{ij} = \varphi(e_i', f_j') = \varphi\Big(\sum_{k=1}^n p_i^k e_k, \sum_{l=1}^n q_j^l f_l\Big) = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n p^k\cdot q_j^l\,\overbrace{\varphi(e_k,f_l)}^{=1} =$$
$$= \sum_{k=1}^n p_i^k q_j^k = \sum_{k=1}^n (p_k^i)^T q_j^k$$

$E = P^TQ \Rightarrow Q = (P^T)^{-1}$

*) Neka je φ bilinearna funkc. na prostoru $X'\times Y$, $\mathcal{A}\in Hom(X,X')$ a ψ definisana na $X\times Y$ sa $\psi(x,y) = \varphi(\mathcal{A}(x),y)$ gdje je $x\in X$, a $y\in Y$. Dokazati da je ψ bilinearna funkc. na $X\times Y$. Ukoliko je bilinearna funkc. φ nedegenerisana, dokazati da vrijedi:

a) $\psi(x,y) = 0\ (y\in Y) \Leftrightarrow x\in Ker(\mathcal{A})$

b) $\psi(x,y) = 0\ (x\in X) \Leftrightarrow y\in (Im(\mathcal{A}))^\perp$ pri čemu se anihilator uzima u odnosu na φ.

Rj:

Pokažimo najprije da je ψ bilinearna funkc.

1) $\psi(x_1+x_2,y) = \varphi(\mathcal{A}(x_1+x_2),y) = \varphi(\mathcal{A}(x_1)+\mathcal{A}(x_2),y) = \varphi(\mathcal{A}(x_1),y)+\varphi(\mathcal{A}(x_2),y) = \psi(x_1,y)+\psi(x_2,y)$

2) $\psi(\alpha x,y) = \varphi(\mathcal{A}(\alpha x),y) = \varphi(\alpha\mathcal{A}(x),y) = \alpha\varphi(\mathcal{A}(x),y) = \alpha\psi(x,y)$

3) $\psi(x,y_1+y_2) = \varphi(\mathcal{A}(x),y_1+y_2) = \varphi(\mathcal{A}(x),y_1)+\varphi(\mathcal{A}(x),y_2) = \psi(x,y_1)+\psi(x,y_2)$

4) $\Psi(x,\alpha y) = \varphi(\mathcal{A}(x),\alpha y) = \alpha(\varphi(\mathcal{A}(x), y)) = \alpha \Psi(x,y)$.

Ψ je bilinearna funkc. na prostoru $X \times Y$

Pretp. da je φ nedegenerisana bilinearna funkc.

a) $\Psi(x,y) = 0 \quad (y \in Y) \iff \varphi(\mathcal{A}(x), y) = 0 \quad (y \in Y) \iff \mathcal{A}(x) = 0 \iff x \in Ker(\mathcal{A})$

b) $\Psi(x,y) = 0 \quad (x \in X) \iff \varphi(\mathcal{A}(x), y) = 0 \quad (x \in X) \iff y \in Im(\mathcal{A})$ a to je podmodul modula ($\perp$ anihilator) $\iff y \in (Im(\mathcal{A}))^{\perp}$

*) Neka su E, F i G vekt. pr. nad poljem $\mathbb{R}$ sa bazama $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{g_1, g_2\}$. $\varphi : E \times F \to \mathbb{R}$ bilinearna funkc. koja u odnosu na date baze ima matricu $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ i neka je $\mathcal{A} : E \to F$ lin. transformacija koja u odnosu na date baze ima matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

a) Naći matricu bilinearne funkc. φ u odnosu na baze $\{e_1+e_2, e_2\}$ prostora E i bazu $\{f_1+f_2, f_2+f_3, f_3+f_1\}$ prostora F.

b) Dokazati da je funkc. Ψ $E \times G \to \mathbb{R}$ definisana sa $\Psi(x,y) = \varphi(x, \mathcal{A}(y))$ bilinearna i odrediti matricu preslikavanja Ψ u odnosu na date baze prostora E, G.

c) Ako je $[\{-2e_1\}] \subseteq E$, nađi $A^{\perp}$ i $A^{\perp\perp}$ u odnosu na φ i Ψ.

d) Dokazati da je preslikavanje $y \to \varphi(e_1 - 2e_2, y)$ linearno i naći matricu ovog lin. presl. u odnosu na neki par baza domena i kodomena.

e) Da li je preslikavanje $\lambda : E \times (F \times G) \to \mathbb{R}$ def. sa $\lambda(x,(y,z)) = \varphi(x,y) + \Psi(x,z)$ bilinearno i ako jeste naći njegovu matricu u odnosu na neki par baza E i $F \times G$ prostora.

Rj:
Označimo sa P matricu prelaza sa $\{e_1, e_2\}$ u $\{e_1+e_2, e_2\}$

$$P = \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array}$$
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a sa Q matricu prelaza sa $\{f_1, f_2, f_3\}$ na $\{f_1+f_2, f_2+f_3, f_3+f_1\}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

M - matrica bilinearne funkc. φ u odnosu na baze $\{e_1+e_2, e_2\}$ prostora E i $\{f_1+f_2, f_2+f_3, f_3+f_1\}$ prostora F.

$N = P^T M Q$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\varphi(e_1', e_2') = \varphi(e_1+e_2, f_1+f_2) = \varphi(e_1, f_1) + \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_2, f_1) + \varphi(e_2, f_2) = 1+1+2+1 = 5$

b)

1. $\psi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1+x_2,A(y))=\varphi(x_1,A(y))+\varphi(x_2,A(y))=\psi(x_1,y)+\psi(x_2,y)$

2. $\psi(\alpha x,y)=\varphi(\alpha x,A(y))=\alpha\varphi(x,A(y))=\alpha\psi(x,y)$

3. $\psi(x,y_1+y_2)=\varphi(x,A(y_1+y_2))=\varphi(x,A(y_1)+A(y_2))=\varphi(x,A(y_1))+\varphi(x,A(y_2))=\psi(x,y_1)+\psi(x,y_2)$

4. $\psi(x,\alpha y)=\varphi(x,A(\alpha y))=\varphi(x,\alpha A(y))=\alpha\varphi(x,A(y))=\alpha\psi(x,y)$.

$\psi(e_1,g_1)=\varphi(e_1,A(g_1))=\varphi(e_1,f_1-2f_2+f_3)=\varphi(e_1,f_1)-2\varphi(e_1,f_2)+\varphi(e_1,f_3)=1-2+2=1$

$\psi(e_2,g_1)=\varphi(e_2,A(g_1))=\varphi(e_2,f_1-2f_2+f_3)=\varphi(e_2,f_1)-2\varphi(e_2,f_2)+\varphi(e_2,f_3)=2-2+3=3$

$\psi(e_1,g_1)=1$

$\psi(e_2,g_1)=3$

$\psi(e_1,g_2)=\varphi(e_1,A(g_2))=\varphi(e_1,f_1+3f_2+4f_3)=\varphi(e_1,f_1)+3\varphi(e_1,f_2)+4\varphi(e_1,f_3)=1+3+8=12$

$\psi(e_2,g_2)=\varphi(e_2,A(g_2))=\varphi(e_2,f_1+3f_2+4f_3)=\varphi(e_2,f_1)+3\varphi(e_2,f_2)+4\varphi(e_2,f_3)=2+3+12=17$

$\psi(e_2,g_2)=17$

$L=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 3 & 17\end{bmatrix}$ a može i $L=H\cdot A$

c)

$A=[\{-2e_1\}]=\{-2\alpha e_1:\alpha\in R\}$

$A^{\perp}=\{y\in F:\varphi(x,y)=0,\ x\in A\}=\{y\in F\mid\varphi(-2\alpha e_1,y)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\beta_1f_1+\beta_2f_2+\beta_3f_3\in F\mid\varphi(-2\alpha e_1,\beta_1f_1+\beta_2f_2+\beta_3f_3)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\beta_1f_1+\beta_2f_2+\beta_3f_3\in F\mid\beta_1\varphi(e_1,f_1)+\beta_2\varphi(e_1,f_2)+\beta_3\varphi(e_1,f_3)=0\}=$

$=\{\beta_1f_1+\beta_2f_2+\beta_3f_3\in F\mid\beta_1+\beta_2+2\beta_3=0\}=\{(-\beta_2-2\beta_3)f_1+\beta_2f_2+\beta_3f_3\mid\beta_2,\beta_3\in R\}$. $\underline{\dim_{\varphi}^{\perp}=2}$

$\dim A_{\varphi}^{\perp\perp}=\dim E-\dim A_{\varphi}^{\perp}=2-2=0\Rightarrow A_{\varphi}^{\perp\perp}=\{0_E\}$

$A_{\psi}^{\perp}=\{y\in G:\psi(x,y)=0,\ x\in A\}=\{y\in G:\psi(-2\alpha e_1,y)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\gamma_1g_1+\gamma_2g_2\in G:\psi(-2\alpha e_1,\gamma_1g_1+\gamma_2g_2)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\gamma_1g_1+\gamma_2g_2\in G:\gamma_1\psi(e_1,g_1)+\gamma_2\psi(e_1,g_2)=0\}=\{\gamma_1g_1+\gamma_2g_2\in G:\gamma_1+12\gamma_2=0\}$

$=\{-12\gamma_2g_1+\gamma_2g_2:\gamma_2\in R\}=[-12g_1+g_2]\subseteq G$

$A_{\psi}^{\perp\perp}=\{x\in E:\psi(x,y)=0,\ y\in A^{\perp}\}=\{x\in E:\psi(x,-12\alpha g_1+\alpha g_2)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\in E:\psi(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2,-12\alpha g_1+\alpha g_2)=0,\ \alpha\in R\}=$

$=\{\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\in E:-12\alpha_1\psi(e_1,g_1)+\alpha_1\psi(e_1,g_2)-12\alpha_2\psi(e_2,g_1)+\alpha_2\psi(e_2,g_2)=0\}=$

$=\{\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\in E:-12\alpha_1+12\alpha_1-12\alpha_2\cdot 3+17\alpha_2=0\}=\{\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\in E:\alpha_2=0\}=$

$=\{\alpha_1e_1:\alpha_1\in R\}=[e_1]$, njezova dimenzija je 1 d)

$B : F \to \mathbb{R}$

$B(y) = \varphi(e_1 - 2e_2, y)$

$B(y_1 + y_2) = \varphi(e_1 - 2e_2, y_1 + y_2) = \varphi(e_1 - 2e_2, y_1) + \varphi(e_1 - 2e_2, y_2) = B(y_1) + B(y_2)$

$B(\alpha y) = \varphi(e_1 - 2e_2, \alpha y) = \alpha\varphi(e_1 - 2e_2, y) = \alpha B(y)$

Odredimo sad matricu preslikavanja B

$B(f_1) = \varphi(e_1 - 2e_2, f_1) = \varphi(e_1, f_1) - 2\varphi(e_2, f_1) = 1 - 4 = -3$

$B(f_2) = \varphi(e_1 - 2e_2, f_2) = \varphi(e_1, f_2) - 2\varphi(e_2, f_2) = 1 - 2 = -1$

$B(f_3) = \varphi(e_1 - 2e_2, f_3) = \varphi(e_1, f_3) - 2\varphi(e_2, f_3) = 2 - 6 = -4$

$B = [-3, -1, -4]$

e)

1) $\lambda(x_1 + x_2, (y, z)) = \varphi(x_1 + x_2, y) + \psi((x_1, y_2), z) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) + \psi(x_1, z) + \psi(x_2, z) =$

$= (\varphi(x_1, y) + \psi(x_1, z)) + (\varphi(x_2, y) + \psi(x_2, z)) = \lambda(x_1, (y, z)) + \lambda(x_2, (y, z))$

2)

$\lambda(\alpha x, (y, z)) = \varphi(\alpha x, y) + \psi(\alpha x, z) = \alpha\varphi(x, y) + \alpha\psi(x, z) = \alpha(\varphi(x, y) + \psi(x, z)) = \alpha\lambda(x, (y, z))$

λ je linearno po prvom argumentu (dalje sami!)

$F \times G$

$(f, g) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) =$

$= \alpha_1(f_1, 0) + \alpha_2(f_2, 0) + \alpha_3(f_3, 0) + \beta_1(0, g_1) + \beta_2(0, g_2)$

$(f_1, 0), (f_2, 0), (f_3, 0), (0, g_1), (0, g_2)$ generišu prostor $F \times G$, a kako su oni lin. nez. čine bazu prostora $F \times G$, odakle baza nam ima 5 vektora.

$\dim(F \times G) = 5$

$k_{11} = \lambda(e_1, (f_1, 0)) = \varphi(e_1, f_1) + \psi(e_1, 0) = 1$

$k_{12} = \lambda(e_1, (f_2, 0)) = \varphi(e_1, f_2) + \psi(e_1, 0) = 1$

$k_{13} = \lambda(e_1, (f_3, 0)) = \varphi(e_1, f_3) + \psi(e_1, 0) = 2$

$k_{14} = \lambda(e_1, (0, g_1)) = \varphi(e_1, 0) + \psi(e_1, g_1) = 1$

$k_{15} = \lambda(e_1, (0, g_2)) = \varphi(e_1, 0) + \psi(e_1, g_2) = 12$

$k_{21} = \lambda(e_2, (f_1, 0)) = \varphi(e_2, f_1) + \psi(e_2, 0) = 2$

$k_{22} = \lambda(e_2, (f_2, 0)) = \varphi(e_2, f_2) = 1$

$k_{23} = \lambda(e_2, (f_3, 0)) = \varphi(e_2, f_3) = 3$

$k_{25} = \lambda(e_2,(0,g_2)) = \psi(e_2,g_2) = 17$

$$K = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 17 \end{array}\right]$$

M L

26.02.'04.

Determinante n-tog reda

Metode izračunavanja

I metod svođenja na trougaonu determinantu

1.) Izračunati determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

R: I vrsta minus ostale

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

2) Izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} = (x-a_1) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x-a_1} & x & x & \dots & x \\ 1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_i-x) \cdot \begin{vmatrix} \frac{a}{a_1-x} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x}{a_i-x} & \frac{x}{a_2-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_i-x) \left[\frac{a_i}{a_i-x} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x}{a_i-x}\right]$$

3) Izračunati determinantu:

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_1+a_2+\dots+a_n+x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + x\right)$$

II metod nalaženja linearnih faktora determinante

U ovom metodu determinantu posmatramo kao polinom jedne ili više promjenjivih koje se javljaju kao elementi determinante. Posmatrajući taj polinom zaključit ćemo da je djeljiv nekim linearnim faktorima ili proizvodom linearnih faktora ukoliko su prosti. Dijeljenjem determinante sa ovim proizvodom ili njegovim faktorima dobit ćemo jednostavniju det. koju možemo jednostavno izračunati.

4) Izračunati determinantu

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & 0 & x \end{vmatrix}$$

Posmatrajmo det. kao polinom sa promjenjivim x, y i z.

Ako prvoj vrsti dodamo ostale imamo:

$$D=\begin{vmatrix} x+y+z & x & y & 0 \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & 0 & x \end{vmatrix}$$

Možemo izdvojiti faktor $(x+y+z)$ što znači da je taj polinom djeljiv sa $x+y+z$.

Saberemo I i II_k i od toga oduzmemo zbir III i IV_k

$$D=\begin{vmatrix} x-(y+z) & x & y & z \\ x-(y+z) & 0 & z & y \\ (y+z)-x & z & 0 & x \\ (z-y)-x & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Vidimo da je determinanta djeljiva sa $x-(y+z)$ tj. $x-y-z$. Saberemo $(I_k+III_k)-(II_k+IV_k)$.

$$D=\begin{vmatrix} y-(x+z) & x & y & z \\ (x+z)-y & 0 & z & y \\ y-(z+x) & z & 0 & x \\ (z+x)-y & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Zaključujemo da postoji još jedan faktor $y-(x+z)$.

Još $I_k+IV_k-(II_k+III_k)$

$$D=\begin{vmatrix} z-(x+y) & x & y & z \\ (x+y)-z & 0 & z & y \\ (y+x)-z & z & 0 & x \\ z-(x+y) & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Postoji još jedan faktor tj. $x+y-z$. Svi faktori koje smo izvukli su prosti, pa to znači da je determinanta djeljiva njihovim proizvodom.

$$D = g(x,y,z)\underbrace{(x+y+z)(y-x-z)(x-y-z)(x+y-z)}_{(-1)z^4+\cdots}$$

Ostaje problem polinom $g(x,y,z)$.

Koeficijent koji množi z na sporednoj dijagonali je 1.

Imamo $g(x,y,z)=-1$

Pa na kraju dobijamo

$$D = -(x+y+z)(y-x-z)(x-y-z)(x+y-z)$$

5) Metodom nalaženja linearnih faktora izračunati Vandermondovu determinantu n-tog reda

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Rj:

Posmatrajmo det. V_n kao polinom promjenjive x_n sa koefic. koji zavise od $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ako uzmemo da je $x_n = x_1$, prva i posljednja vrsta su jednake. Znači vrijednost det. je jednaka nuli. To znači da je det. djeljiva faktorom $x_n - x_1$. Slično ako je $x_n = x_2$, vrijednost det. je ponovo nula pa je djeljiva sa $x_n - x_2$.

Ako nastavimo tako dalje zaključujemo da je det. djeljiva sa $x_n - x_{n-1}$

Imamo $V_n = \underbrace{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}_{x^{n-1}} \cdot g(x_n)$

Razvijmo determinantu po posljednjoj vrsti. Dobit ćemo 1 u kojoj x^n ne figuriše itd.

Zaključak je da polinom $g(x_n)$ ne zavisi od x_n. Dalje je $g(x_n) = V_{n-1}$

Na det. V_{n-1} primijenimo isti postupak.

Zaključujemo da je $V_{n-1} = (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})\, g(\overset{\text{ne zavisi od } x_{n-1}}{x_{n-1}}) =$

$= (x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\, V_{n-2}$

Nastavimo ovako dalje i zaključujemo da je

$V_n = (x_n - x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\ldots(x_2-x_1)$, $V_1 = 1$

pa je $\displaystyle V_n = \prod_{n \le j < i \le 1} (x_j - x_i)$

6) Izračunati det.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{\text{I}_k + \text{ostali}} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i & \sum_{i=2}^{n} a_i & \sum_{i=3}^{n} a_i & \dots & a_{n-1}+a_n & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^{n-1}$$

7) Izračunati det.

a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

b)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

c)

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Rj.)

a)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -b_1 & a_1 \\ 0 & \dots & -b_2 & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_n & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & \dots & -b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \cdot (-1)^{n-1} \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$$

b)

$$B = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = n \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= n(-1)^{n-1}(-1)^{n+n-1+\dots+2} = n(-1)^{n-1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$

e)

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

8) Metodom nalaženja lin. faktora izračunati det.:

a)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

Posmatrajmo det. D po promjenjivoj x. Ako uzmemo

$x = 1$ imamo $2 \cdot I_k = II_k \Rightarrow D = 0$ tj. $x-1 \mid D$

$x = 2$ imamo $3 \cdot I_k = III_k \Rightarrow D = 0$ tj. $x-2 \mid D$

$\vdots$

$x = n-1$ imamo $n \cdot I_k =$ n-ta kolona $\Rightarrow D = 0$ tj. $x-(n-1) \mid D$

Svi ovi faktori $(x-1), (x-2), (x-3), \dots, (x-n+1)$ su prosti

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1}(x-i) \mid D$

Zaključujemo da je $D = \prod_{i=1}^{n-1}(x-i)\, q(x)$

Ako pomnožimo el. na glavnoj dijagonali, imamo da uz x^{n-1} stoji

1 tj. $D_{n-1} = 1 \cdot x^{n-1} + \dots$

$\prod_{i=1}^{n-1}(x-i) = 1 \cdot x^{n-1} + \dots \Rightarrow q(x) = 1$ tj. vrijedi $D = \prod_{i=1}^{n-1}(x-i)$

b)

$$D = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c-x & a & b & c \\ a+b+c-x & -x & c & b \\ a+b+c-x & c & -x & a \\ a+b+c-x & b & a & -x \end{vmatrix}$$

$(a+b+c-x) \mid D$

$I_k + II_k \cdot (III_k + IV_k)$

$$D = \begin{vmatrix} (a-x)-(b+c) & a & b & c \\ (a-x)-(b+c) & -x & c & b \\ (b+c)-(a-x) & c & -x & b \\ (b+c)-(a-x) & b & a & -x \end{vmatrix}$$

$(a-x-b-c) \mid D$

$(I_k + III_k) - (II_k + IV_k)$

$$D = \begin{vmatrix} (b-x)-(a+c) & a & b & c \\ (a+c)-(b-x) & -x & c & b \\ (b-x)-(a+c) & c & -x & a \\ (c+a)-(b-x) & b & a & x \end{vmatrix}$$

$(b-x-a-c) \mid D$

$I_k + IV_k - (II_k + III_k) \Rightarrow (c-x-a-b) \mid D$

Pošto su svi faktori uzajamno prosti zaključujemo je da

$(-1)(a+b+c-x)(b+c+x-a)(c+a+x-b)\cdot(a+b+x-c)\, g(c) = D$

$1 \cdot c^4 + \dots = 1 \cdot c^4 + \dots \Rightarrow g(c) = 1$ pa je

$D = (x-a-b-c)(x+a+b-c)(x+a+c-b)(x+b+c-a)$.

04.03.'04.

III metod rekurzivnih relacija

U ovom metodu datu det. razvijemo po jednoj od vrsta ili kolona i prikažemo je u vidu linearne kombinacije det. istog oblika ali nižeg reda. Na ovaj način ćemo dobiti rekurzivnu relaciju pomoću koje možemo izračunati det., tj. dobićemo diferencnu jed. koju treba riješiti. Nekada je empirijskom indukcijom računajući $D_1, D_2 \dots$ moguće naslutiti opći oblik za det. D_n što onda dokažemo mat. indukcijom. Uglavnom se ovi postupci kombinuju.

Posmatrajmo sada spec. slučaj u općem obliku

Neka je rekurzivna relacija data sa $D_n = p D_{n-1} + q D_{n-2}$ gdje su p i q konst. koje ne zavise od n. Ako je $q=0$ onda je

(1) $D_n = p D_{n-1} = p^2 D_{n-2} = \dots = p^{n-1} D_1 = p^{n-1} a_{11}$

Prep. sada da je $q \neq 0$. Posmatrajmo kv. jed. $x^2 = px + q$ i korijene ove jed. označimo sa α i β

$x^2 - px - q = 0$

$\alpha + \beta = p$
$-\alpha\beta = q$

Ove dvije rel. uvrstimo u (1)

$D_n = (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$ $\qquad \alpha \neq \beta$

2) $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$

3) $D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2})$

Iz (2) $\Rightarrow$ $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) \; / \beta$ (2')

Iz (3) $\Rightarrow$ $D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) \; / \alpha$ (3')

$$\left.\begin{aligned} \beta D_n - \alpha\beta D_{n-1} &= \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1) \\ -\alpha D_n + \alpha\beta D_{n-1} &= -\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) \end{aligned}\right\} +$$

$$\beta D_n - \alpha D_n = \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1) - \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) \quad / \cdot -1$$

$$(\alpha - \beta) D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)$$

$$D_n = \alpha^n \frac{(D_2 - \beta D_1)}{\alpha(\alpha-\beta)} - \beta^n \frac{(D_2 - \alpha D_1)}{\beta(\alpha - \beta)}$$

$$\boxed{D_n = \alpha^n \cdot C_1 - \beta^n C_2 \quad \text{gdje je} \quad C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)}, \; C_2 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \neq \beta}$$

Pretp. da je $\alpha = \beta$.

Sada su rel. (2) i (3) iste relacije pa imamo

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2} \underbrace{(D_2 - \alpha D_1)}_{A}$$

(4) $D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2} \cdot A$ gdje je $A = D_2 - \alpha D_1$

Iz ovog $\Rightarrow$

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3} \cdot A \quad / \cdot \alpha$$

$$\alpha D_{n-1} - \alpha^2 D_{n-2} = \alpha^{n-2} \cdot A \quad . \text{ Iz ovog i (4) } (+) \Rightarrow$$

(5) $D_n - \alpha^2 D_{n-2} = 2\alpha^{n-2} \cdot A$

U (4) umjesto n stavimo $n-2$ $\Rightarrow$

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4} \cdot A \quad / \cdot \alpha^2$$

$$\alpha^2 D_{n-2} - \alpha^3 D_{n-3} = \alpha^{n-2} \cdot A \qquad + (5) \quad \Rightarrow$$

$$D_n - \alpha^3 D_{n-3} = 3\alpha^{n-2} \cdot A$$

Nastavljajući ovako dalje imamo

$$D_n - \alpha^{n-1} D_1 = (n-1)\alpha^{n-2} \cdot A$$

$$D_n = \alpha^{n-1} D_1 + (n-1)\alpha^{n-2} \cdot A$$

$$D_n = \alpha^n \left(\frac{D_1}{\alpha} + \frac{(n-1)A}{\alpha^2} \right)$$

$$\boxed{D_n = \alpha^n (F_1 + (n-1) F_2) \quad \text{gdje je} \quad F_1 = \frac{D_1}{\alpha}, \; F_2 = \frac{\cancel{D_2-}\,\alpha D_1}{\alpha^2}}$$

za kv. jed. sa jednostrukim korijenom.

*) Rekurzivnom metodom izračunati vrijednost det.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

R:

$$a_n = a_n - x + x$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & x & \dots & x \\ x & x & x & a_3 & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & (a_n - x) + x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & x & \dots & x \\ x & x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & 0 \\ x & a_2 & x & \dots & 0 \\ x & x & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + (a_n - x) \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + (a_n - x) D_{n-1} =$$

$$D_{n-1} = x(a_1 - x)\dots(a_{n-2} - x) + (a_{n-1} - x) + (a_{n-1} - x) D_{n-2}$$

$$D_n = x(a_1 - x)\dots(a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)\dots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + (a_n - x)(a_{n-1} - x) D_{n-2}$$

$$D_n = x(a_1 - x)\dots(a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)\dots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + x(a_1 - x)\dots(a_{n-3} - x)(a_{n-1} - x) \cdot$$

$$\cdot (a_n - x) + a_1(a_n - x)(a_{n-1} x)\dots =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_i - x)\left[\frac{x}{a_n - x} + \frac{x}{a_{n-1} - x} + \dots + \frac{a_1}{a_1 - x}\right]$$

*) Izračunati vrijednost det.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ & & & & & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5D_{n-1} - 6\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$x^2 = 5x - 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 3$

$\alpha = 2$
$\beta = 3$

$$C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)} \qquad C_2 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)}$$

$D_1 = 5$

$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$

$$C_1 = \frac{19-15}{2\cdot -1} = -2$$

$$C_2 = -\frac{19-10}{3\cdot -1} = 3$$

$$D_n = \alpha^n C_1 + \beta^n C_2 = 2^n \cdot -2 + 3^n \cdot 3 = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

*) Primjenom rek. rel. izračunati det.

a)

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha\beta \end{vmatrix} \qquad \alpha \neq \beta$$

b)

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$$

a)

$$D_n = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha+\beta \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta) D_{n-1} - (\alpha\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$D_n = (\alpha+\beta)\, D_{n-1} - \alpha\beta\, D_{n-2}$

$x^2 - (\alpha+\beta) x_1 + \alpha\beta D_{n-2}$

$x_1 = \alpha$
$x_2 = \beta$

$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$

$D_1 = \alpha+\beta$

$D_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

$D_1 = C_1\alpha + C_2\beta$

$D_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$

$\alpha+\beta = C_1\alpha + C_2\beta \quad / \cdot(-\alpha)$

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$

$-\alpha^2 - \alpha\beta = -C_1\alpha^2 - C_2\alpha\beta$

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$

$\beta^2 = C_2(\beta^2 - \alpha\beta)$

$\beta = C_2(\beta - \alpha)$

$C_2 = \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$

$C_1\alpha = \alpha+\beta - \dfrac{\beta^2}{\beta-\alpha}$

$C_1\alpha = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2}{\beta-\alpha}$

$C_1 = \dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}$

$$D_n = \frac{-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

b.)

$$D_{n+1} = (-1)^{n+1+1} a_n \begin{vmatrix} -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n \end{vmatrix} + x_n \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_{n-1} & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2} a_n (-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n + x_n D_n = a_n y_1 y_2 \cdots y_n + x_n D_n =$$

$$D_n = a_{n-1} y_1 y_2 \cdots y_{n-1} + x_{n-1} D_{n-1}$$

$$= \cancel{a_n y_1 \cdots y_n + x_n \cdot (a_{n-1} y_1 \cdots y_{n-1} + x_{n-1}}$$

$$= a_n y_1 \cdots y_n + a_{n-1} y_1 y_2 \cdots y_{n-1} x_n + a_{n-2} y_1 y_2 \cdots y_{n-2} x_{n-1} x_n + a_1 y_1 x_2 x_3 \cdots x_n + a_0 x_1 x_2 \cdots x_n$$

x)

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-1} - 4 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= 25 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} - 24 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} - 10 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-3} = A_{n-2} - 10 A_{n-3}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$$

$A_n = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$\alpha = 1$

$\beta = 2$

$D_1 = 3$

$D_2 = 7$

$C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)} = -1$

$C_2 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)} = 2$

$A_n = -\alpha^n + 2\beta^n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1$

$D_n = A_{n-2} - 10A_{n-3} = 2^{n-1} - 1 - 10 \cdot 2^{n-2} + 10 = 9 - 2^{n+1}$

*) II način

$$D_n = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$$

$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\alpha = 1$

$\beta = 2$

$D_1 = \cancel{5}$

$D_2 = 1$

$C_1 = \ldots$

$C_2 = \ldots$

$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n = 1 + 2^n \ldots$

a) Riješiti po x jed. stepena n.

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$$ gdje su $a_1 \dots a_n$ međusobno različiti br.

b) Izračunati det.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

a)

za $x = a_1$, $D=0$

za $x = a_2$, $D = 0$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

za $x = a_n$, $D = 0$

Što znači da je $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \mid D$

$$D = q \cdot \overbrace{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}^{x^n + \dots}$$

U det. imamo da $x^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n+1+1} + \dots$

$$q = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$ - dakle q ne zavisi od x

pa su jedina rj. $\boxed{\begin{matrix} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n \end{matrix}}$

$$\cdots \begin{vmatrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ & \vdots \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = (a+1) D_{n-1} - a D_{n-2}$$

$\cdots (a+1)x + a = 0$

$x_1 = a$

$x_2 = 1$

$\alpha = a$

$\beta = 1$

$D_1 = a + 1$

$D_2 = (a+1)^2 - a = a^2 - a + 1$

$$c_1 = \frac{a^2}{a(a-1)}$$

$$c_2 = -\frac{1}{a-1}$$

$$D_n = \alpha^n \cdot c_1 + \beta^n c_2 = \frac{a^n \cdot a^2}{\cancel{a}(a-1)} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1}$$

*Neka je V modul nad prstenom R a X neprazan podskup od V. Dokazati da skup X ima osobinu (*) $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ $\alpha+\beta+\gamma=1 \Rightarrow \alpha x+\beta y+\gamma z \in X$

Akko postoji podmodul S modula V i $a \in V$ tako da je:

(**) $g \in R$ $X = a+S = \{a+s \mid s \in S\}$ u tom slučaju podmodul S je jednoznačno određen skupom X a ~~elemen~~ element a se može proizvoljno uzeti iz X. Ukoliko prsten R posjeduje element $g \in R \mid g$ i $1-g$ invertibilni ~~iz X. Ukoliko~~ elementi tako da je (*) $\Longleftrightarrow$ (**)

Ako je $\alpha \in R \Rightarrow \alpha x+(1-\alpha)x \in X$

Rj:

Pretp. najprije $X = a+S = \{a+s, s \in S\}$